

CVRVI AC RECTI PROPORTIO

A

BARTHOLOMÆO SOVERO

FRIBVRGENSI

In Gymnasio Patauino Matheseos Professore

promota.

LIBRIS SEX.

AD

Illustriss. & Excellentiss. Viros

NICOLAVM CONTARENVM,

IOHANNEM BAPTISTAM NANI,

DOMINICVM MOLINVM

EIVSDEM

GYMNASII PATAVINI MODERATORES.



PATAVII,

Ex Typographia Varisci Varisci. MDCXXX.

Superiorum permissu.

A D

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Viros

NICOLAVM CONTARENVM, IOHANNEM BAPTISTAM NANI, DOMINICVM MOLINVM

GYMNASII PATAVINI MODERATORES.

GVLIELMVS SOHIERVS

GALLOBELGA.



Tatuerat author, quem præripuit Fatum, hunc vobis librum commendare, hoc eſt, ſplendoris Veſtri acceſſione, ſummoperè ornare. Iam incumbit mihi hoc onus. Non enim præcipuum amici munus, proſequi defunctum ignauo queſtu, ſed quæ voluerit, meminiſse, quæ mandauerit, exequi. Vos igitur ſubmiſsè rogo, hunc poſthumum veſtri alumni fœtum, &ſi per ignotum ad vos accedat, benignè ſuſcipere, atque veſtra tutela dignari. Hoc decet ſummam veſtram humanitatem; cuius ego laudes præterire, quàm ingenij culpa deterere, malo. Valete:



EPIG. AD LECTOREM

CVM CATASTR.

Ad defuncti AVTORIS manes.

Condit ubi vultus Vasti lustrator, & ævi
Præsul, victorem nox fugat atra suum:
Protenus adparent tenebrarum sidera alumnj,
Et rutila aurati fornicis antra replent.
Non aliter SOVERVS ubi sua subtrahit ora,
Fusca polum velant texta Mathematicum;
Qvéis comites, lector genij nova lumina, mundo
Decreta ante obitum, posthuma scripta, vides.
Rara tamen: nec cuncta simùl, conscendere nostras
Ne reliquis desint, sidera jussa, plagas.
Cætera tempus habet, speratis condita lustris
Omnia in apricum stante trahenda die.
Nunc fruere è multis multo, sed pondere, mole
Charta tumens famæ præmia nulla capit.

Sed Tu, qvi dextram trutinâ suffultus, in omne
Qvantum agis ingenij viribus imperium
Dic mihi, si post Iusta licet, SOVERE, vicésne
Æquis usque animis intueare novas,
Mortua Te vivo dum cernunt viva sepultum
Et sibi detractum dant Tibi prompta diem?

Sag-

Suggeris, an fallor, composita vita, modesti
Mores, ac liqvido cor adamante madens
Noluit eludi vanâ prurigine mentem,
Sic docuj; ast juvit sic didicisse simul:
Quod sit ea annorum via, & hæc antiqua sepulchri
Lex; Variare novâ tempore freta vice.

F.
Ioh. Iac. Hartig. Lus.



Sic

Sic maris ac terræ vastas emensus abyssos
Ad Superos durâ lege SOVERVS abit?
Sic liquit terras humanis grandior ausis,
Mortales visus jam superasse vias?
Fallor, an exactè Curvis quod Recta quadrasset,
Naturam voluit Parca leuare metu.
Invida quid lucem, famam quid Fata negatis?
Posthuma SOHIERO vindice fama venit.
Hadriaci faveaut modò Numina magna Lycei,
Viuet Opus, genio vivet Vterquè suo.

Vivo quod debebat
post fata desideratiss.
L. S.
Ioan. Rhodius, Danus.

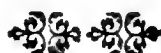


CVR-



CVRVI AC RECTI
Proportio promota.

LIBER PRIMVS.

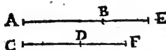


THEOREMA I. PROPOS. I.



SI duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates addantur, aut minor maiori; maior erit ratio maioris ad minorem, quam maioris cum addito, ad minorem cum addito.

SINT duæ quantitates inæquales AB. maior, CD. minor, quibus addantur quantitates æquales BE. DF. Dico maiorem esse rationem AB. ad CD.



quam AE. ad CF. Cum enim maior sit AB. quam CD. maior erit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & componendo ac permutando, maior erit ratio totius AE. ad totam CF. quam partis BE. ad partem DF. Quare & reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totam CF. Quod demostrare oportuit. 8. 5. 33. 5.

Eandem demonstrationem fieri certum est, si BE. statuatur minor quam DF.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI ex duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates demantur, aut minor ex maiori; minor erit ratio maioris ad minorem, quam residui primæ quantitatis ad residuum secundæ.

Statuatur AE. prima quantitas maior, & CF. secunda minor, & ex AE. auferatur BE. æqualis ablatę DF. ex CF. Dico minorem esse rationem AE. ad CF. quam AB. ad CD. Cum enim maior sit AE. quam CF. maior erit ratio AE. ad BE. quam CF. ad DF. & permutando maior ratio totius AE. ad totum CF. quam partis BE. ad partim D.F. Quare reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totum CF. ideoque minor ratio maioris AE. ad minorem CF. quam residui AB. ad residuum CD. Quod erat demonstrandum.



8. 5.

33. 5.

Idem sequetur si BE. sit minor quam DF.

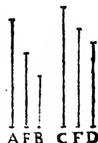
COROLLARIVM.

Hinc sequitur, si sint quatuor magnitudines, quarum prima maior sit quam secunda & tertia, & secunda maior quam quarta, superetque prima secundam eodem aut minori excessu, quo tertia quartam; prima ad secundam minor erit ratio, quam tertiæ ad quartam. Si enim prima quantitas statuatur AE. secunda AB. tertia CF. quarta CD. sitque differentia primæ, & secundæ BE. æqualis differentiæ tertiæ, & quartæ DF. aut etiam minor, erit ex demonstratis minor ratio AE. ad CF. quam AB. ad CD. & permutando minor ratio AE. primæ, ad AB. secundam, quam CF. tertiæ, ad CD. quartam. THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, ac inter primam & ſecundam, itemque inter tertiam & quartam mediæ proportionales ſint quinta, & ſexta; erit primæ ad quintam maior ratio, quam tertiæ ad ſextam.

SIT primæ quantitatis A. ad ſecundam B. maior ratio quam tertiæ C. ad quartam D. & inter A. B. ſtatuatur media proportionalis E. & inter C. D. mediæ item proportionalis F. Dico maiorem eſſe rationem A. ad E. quam. C. ad F. Si enim non eſt maior, ſit vel æqualis, vel minor; Ac ſit primum æqualis, ita vt ſit A. ad E. ſicut C. ad F. eſt autem vt A. ad E. ita E. ad B. ergo vt E. ad B. ita C. ad F. ſed vt C. ad F. ita ponitur F. ad D. vt igitur E. ad B. ita F. ad D. cum



igitur ponatur A. ad E. ſicut C. ad F. atque hinc ſequatur eſſe E. ad B. vt F. ad D. erit ex æqualitate vt A. ad B. ita 31.5.
C. ad D. Quod eſt abſurdum, ponitur enim ratio A. ad B. maior quam C. ad D. Sed dicatur ratio A. ad E. minor quam ratio C. ad F. Quoniam minor eſt ratio A. ad E. quam C. ad F. & vt A. ad E. mediam proportionalem, ita E. ad B. erit minor ratio E. ad B. quam C. ad F. Sed vt C. ad F. mediam proportionalem, ita F. ad D. igitur minor erit ratio E. ad B. quam F. ad D. Cum igitur minor ponatur ratio A. ad E. quam C. ad F. & ſequatur minor proportio E. ad B. quam F. ad D. erit ex æqualitate minor ratio A. ad B. quam C. ad 31.5.
D. Quod eſt abſurdum, poſita enim eſt maior. Igitur cum

ratio dicta neque sit æqualis, neque minor, erit maior. Quod demostrare oportebat.

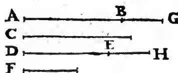
COROLLARIVM.

Eodem prorsus modo demonstrabitur, si prima ad secundam minorem rationem habuerit quam tertia ad quartam ac inter primam ac secundam sumatur media proportionalis quinta, & inter tertiam, & quartam sexta, erit prima ad quintam minor ratio, quam tertia ad sextam. Si enim statuantur C. prima D. secunda A. tertia B. quarta F. quinta E. sexta eodem prorsus modo sequetur maiorem esse rationem A. ad E. quam C. ad F. ideoque minorem C. ad F. quam A. ad E.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI prima quantitas ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior quam tertia, & primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad secundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad secundam C. minorem rationem quam tertia DE. ad quartam F. sitq; AB. maior quam DE. & ad primam AB. ac tertiam DE. addantur æquales BG. EH. Dico minorem esse rationem AG, ad C. quam DH. ad F. Cum enim maior sit AB. quam DE. maior erit ratio AB. ad BG, quam DE. ad EH. &



8. 5. componendo, maior erit ratio AG. ad BG. quam DH. ad

28. 5. EH.

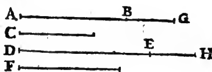
EH. & per conuersionem rationis, minor ratio AG. ad AB. quam DH. ad DE. sed minor etiam ponitur ratio AB. ad C. quam DE. ad F. ergo ex æqualitate minor est ratio AG. ad C. quam DH. ad F. Quod erat probandum 30.5. 31.5.

Eodem modo probatur, si primum additum BG. ponatur minus quam secundum EH. multo minorem esse rationem AG. ad. C. quam DH. ad F.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI habuerit prima quantitas ad secundam maiorem rationemquam tertia ad quartam, sitque prima minor tertia, ac primæ, & tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ maior quam tertiæ erit ratio primæ cum addita ad secundam maior, quam tertiæ cum addita ad quartam.

SIT primæ quantitatis AB. ad secundam. C. maior ratio quam tertiæ DE. ad quartam F. sitque AB. minor quam DE. & primæ ac tertiæ addantur æquales BG. EH. Dico maiorem esse rationem AG. ad. C. quã DH. ad F. cum. n. AB. sit minor quam DE. minor erit ratio AB. ad BG. quam DE. ad EH. & componendo, & per conuersionem rationis, maior erit ratio AG. ad AB. quam DH. ad DE. sed etiam ponitur maior ratio AB. ad C. quam DE. ad F. igitur ex æqualitate maior est ratio AG. ad C. quam DH. ad F. Quod erat demonstrandum. 8.5. 28.5. 35.5. 31.5.

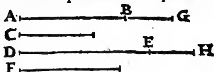


Idem aperte sequitur si primum additum BG. sit maius quam secundum. EH.

THEOREMA VI. PREPOS. VI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam minorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac ex prima, & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima maior quam ex tertia; minor erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

HABEAT prima quantitas AG. ad ſecundam. C. minorem rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. minor quam DH. & ex prima ac tertia demantur æquales BG. EH. Dico minorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C.



quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam minor eſt
8.5. AG. quam DH. & æquales BG. EH. erit AG. ad BG.
27.5. minor ratio quam DH. ad EH. & permutando minor
ratio totius AG. ad totam DH. quam partis BG. ad par-
33.5. tem EH. quare & reliqui AB. ad reliquum DE. minor
27.5. erit ratio quam totius AG. ad totum DH. & permutando minor erit ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam minor eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F.
31.5. igitur ex æqualitate, minor erit ratio primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui. DE. ad quartam. F. Quod demonſtrare oportebat.

Eadem demonſtrationis ratione ſequitur, minorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. ſi detracta pars BG. ponatur maior, quam detracta EH.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, atque ex prima, & tertia æqualis quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

PRIMA quantitas AG. ad ſecundam. C. maiorem habeat rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. maior quam DH. & ex prima, & tertia auferantur æquales BG. EH. Dico maiorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C. quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam maior eſt AG. quam DH. & æquales ſunt BG. EH. habebit AG. ad BG. maiorem rationem quam DH. ad EH. 8.5.
& permutando, maior erit ratio totius AG. ad totum DH. 27.5.
quam partis BG. ad partem EH. quare, & reliqui AB. ad 33.5. 33.5.
reliquum DE. maior eſt ratio quam totius AG. ad totum DH. & permutando maior eſt ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam maior eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F. igitur ex æqualitate maior erit ratio primi reſidui 31.5.
AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui DE. ad quartam F. Quod oſtendere oportebat.

A B G
C
D E H
E

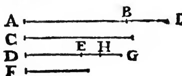
Eodem modo maior fiet ratio reſidui AB. ad reſiduum. C. quam reſidui DE. ad reſiduum F. ſi BG. ſtatuatur minor quam EH.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, ac primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam. C. eandem rationem quam tertia DE. ad quartam F. ſitque AB. maior quam DE. & primę ac tertiæ addantur æquales BI. EG. Dico minorem eſſe rationem AI. ad C. quam DG. ad F. fiat enim vt AB. ad DE. ita



14.5. BI. ad EH. cum AB. ſit maior quam DE. erit BI. id eſt EG. maior quam EH. Quare cum ſit vt AB. ad DE. ita BI. ad EH. erit permutando, componendo, & per conuerſionem rationis vt IA. ad AB. ita HD. ad DE. ſed vt AB. ad. C. ita eſt DE. ad F. ex hypotheſi eſt ergo, ex æqualitate vt
8.5. AI. ad C. ita DH. ad F. minor autem eſt ratio DH. ad F.
13.5. quam DG. ad F. minor igitur etiam eſt ratio AI. ad. C. quam DG. ad F. Quod erat oſtendendum.

Idem etiam aperte ſequitur ſi BI. ponatur minor quam EG. vt ex modo demonſtrandi conſtat.

COROLLARIVM.

EOdem modo oſtenditur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac primæ & tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ maior;

ior; maior erit ratio prima cum addita ad secundam, quam tertia cum addita ad quartam. Nam si DE. statuatur prima, F. secunda, AB. tertia. C. quarta, & addantur BI. EG. aut aequales, aut EG. maior, sequetur eodem modo minorem esse rationem AI. ad C. quam DG. ad F. ideoque maiorem esse rationem DG. ad F. quam AI. ad C.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI fuerit vt prima quantitas ad secundam, ita tertia ad quartam, sitque prima maior tertia, atque ex prima & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio primi residui ad secundam quantitatem, quam secundi ad quartam.

HABEAT prima quantitas AI. ad secundam C. eandem rationem, quam tertia DG. ad quartam F. sitque AI. maior quam DG. & ex prima ac tertia demantur aequales BI. EH. Dico maiorem esse rationem primi residui AB. ad secundam quantitatem C. quam secundi residui DE. ad quartam quantitatem. F. Fiat enim vt AI. ad DG. ita BI. ad HG. erit HG. minor quàm BI. id est quam EG. Quoniam igitur est, vt totum AI. ad totum DG. ita pars BI. ad partem HG. erit reliquum AB. ad reliquum DH. vt totum AI. ad totum DG. & permutando, vt AB. ad AI. ita DH. ad DG. sed vt AI. ad C. ita DG. ad F. ergo ex aequalitate, vt AB. ad C. ita DH. ad F. sed DH. ad F. maiorem habet rationem quam DE. ad F. Igitur primum residuum AB. ad C. maiorem habet rationem, quam secundum DE. ad F. Quod &c. Idem prorsus concluditur si. BI. ponatur minor quam EG.

14.5.
33.5.

A ———————B——— I
C ——————
D ————E—H—— G
F ————

CONSECTARIVM.

Eodem prorſus modo demonſtratur, ſi ſit prima quantitas ad ſecundam, vt tertia ad quartam; ſitque prima minor tertia, ac ex prima & tertia eadem quantitas auferatur, aut ex prima minor; minor erit ratio primi reſidui ad ſecundam quantitatem, quam ſecundi ad quartam. Nam ſi DG. ſtatuatur prima. F. ſecunda. AI. tertia, & C. quarta, & auferantur ex BI. EG. aut æquales, aut BI. minor; ſequetur eodem modo maiorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. ideoque minorem rationem DE. ad F. quam AB. ad C.

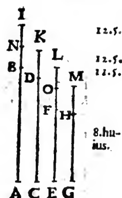
THEOREMA X. PROPOS. X.

SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, ſitque prima quantitas maior quam ſecunda, & tertia, atque additum primum maius ſecundo; minor erit ratio primæ cum addita, ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita.

SIT vt prima quantitas AB. ad ſecundam CD. ita tertia EF. ad quartam GH. quibus ordine addantur IB. KD. LF. MH. ſintque IB. LF. item KD. MH. inter ſe æquales, AB. autem maior quam CD. aut EF. & BI. maius quam DK. Dico minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. Fiat vt CD. ad AB. ita DK. ad BN. Item vt GH. ad EF. id eſt CD. ad AB. (minor ad maiorem) ita HM.
14.5. ad FO. erit BN. minor quam BI. & FO. minor quam FL. Igitur
11.5. 9.5. erit vt DK. ad BN. ita HM. id eſt DK. ad FO. æquales ergo ſunt FO. BN. quæ ſi demantur ex æqualibus FL. BI. remanent

æqua-

æquales OL.NI. Cum igitur ſit vt AB. ad CD. ita BN. ad DK. erit vt AB. ad CD. ita AN. ad CK. & quia eſt ex conſtructione vt EF. ad GH. ita FO. ad MH. erit vt EO. ad GM. ita EF. ad GH. id eſt, AB. ad CD. erit ergo vt AN. ad CK. ita EO. ad GM. Quare cum primæ AN. & tertiæ EO. additæ ſint æquales. NI. OL. ſitque prima maior quam tertia, erit per octauam propoſitionem huius, minor ratio AI. ad CK. quam EL. ad GM. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

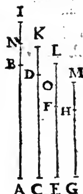
Eodem modo oſtendetur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam; quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, & ſit prima quantitas maior quam ſecunda, ſed minor quam tertia, & primum additum maius ſecundo, maior erit ratio primæ cum addita ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita. In ſuperiori figura ſtatuatur EF. prima, GH. ſecunda, AB. tertia, CD. quarta, ſi reliqua omnia fiant, vt in ſuperiori iuſſum eſt, inueniemus minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. ideoque maiorem eſſe rationem EL. primæ cum addita, ad GM. ſecundam cum addita quam AI. tertiæ cum addita, ad CK. quartam cum addita.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ex quibus ſingulæ quantitates demantur, ita vt ſubtractæ ex prima & tertia, item ex ſecunda & quarta ſint æquales; & ſit prima quantitas maior quam ſecunda ac tertia, primumque

detractum maius secundo; maior erit ratio primi residui ad secundum quam tertij ad quartum.

SIT vt prima quantitas AI. ad secundam CK. ita tertia EL. ad quartam GM. ex quibus ordine demantur IB. KD. LF. MH. sintque IB. LF. æquales, item KD. MH. inter se æquales, AI. autem maior quam CK. aut EL. & IB. quam KD. Dico maiorem esse rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. Fiat vt CK. ad AI. ita DK. ad IN. Item vt GM. ad EL. id est, CK. ad AI. (minor nempe ad maiorem) ita HM. ad OL. erit



14.5. nor nempe ad maiorem) ita H.M. ad OL. erit
11.5. IN. minor quam BI. & OL. minor quam FL. Igitur erit vt DK. ad IN. ita, HM. id est DK. ad
9.5. OL. æquales ergo sunt OL. IN. quæ si demantur ex æqualibus FL. BI. remanent etiam æquales
19.5. OF. BN. Cum igitur sit vt AI. ad CK. ita NI. ad KD. erit & residuum AN. ad residuum CD. vt totum AI. ad totum CK. Et quia est etiam vt EL. ad GM. ita OL. ad MH. erit residui EO. ad residuum GH.
11.5. vt totum EL. ad totum GM. id est, vt AI. ad CK. Igitur erit vt AN. ad CD. ita EO. ad GH. Rursus ex AN. prima & EL. ter-
9. huius. tia demptis æqualibus BN. FO. erit, per nonam huius, maior ratio AB. ad CD. quam EF. ad GH. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIVM.

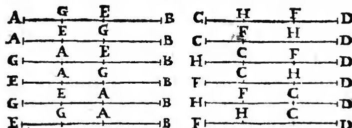
Non aliter ostendetur, si sit vt prima quantitas ad secundam ita tertia ad quartam, ex quibus singula quantitates demantur, ita vt subtracta ex prima & tertia, item ex secunda & quarta sint æquales, & sit prima quantitas maior quam secunda, sed minor quam tertia; ac primum detractum maius secundo; minor erit ratio primi residui ad secundum, quam tertij ad quartum. Hoc probabimus ratione simili qua vsi sumus in superioribus corollarijs, si EL. statuatur prima quantitas, GM. secunda AI. tertia CK. quarta. Nam si reliqua fiant, vt in propositione dictum est,

est, inueniemus maiorem esse rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. ideoque minorem esse proportionem EF. ad GH. quam AB. ad CD.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI fuerint quatuor magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ se se eodem ordine superent, sitque primæ ad secundam in primis magnitudinibus maior ratio, quam primæ ad secundam in secundis, & tertia ad quartam minorem habeat rationem in primis, quam in secundis, sitque tertia magnitudo differentia, aut aggregatum primæ & secundæ; minor erit ratio secundæ ad quartam in primis, quam in secundis magnitudinibus.

SINT quatuor magnitudines priores BA. AG. BG. GE. & quatuor posteriores DC. CH. DH. HF. quæ sese eodem ordine superent, sitque maior ratio BA. ad AG. quam DC. ad



CH. minor autem BG. ad GE. quam DH. ad HF. sitque GB. differentia ipsarum BA. AG. (vt in prima, secunda & quarta serie) aut earundem aggregatum, vt in reliquis. Dico minorem esse rationem AG. ad GE. quam CH. ad HF. Cum enim sit maior ratio BA, ad AG. quam DC. ad CH. erit in prima, secunda & quarta serie, diuidendo, & conuertendo, in reliquis componendo, & conuertendo, minor ratio AG. ad GB.

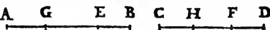
quam

quam CH. ad HD. sed GB. ad GE. etiam minor ratio posita est, quam HD. ad HF. igitur ex æqualitate, minor erit ratio AG. ad GE. quam CH. ad HF. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ sese eodem ordine superent, sitque primæ priorum ad secundam maior ratio, quam primæ posteriorum ad secundam; primæ autem priorum ad tertiam minor ratio, quam primæ posteriorum ad tertiam, sitque prima maior quam secunda, & tertia; maior erit ratio differentiæ primæ, & secundæ, ad differentiam primæ, & tertiæ in prioribus magnitudinibus, quam in posterioribus.

SINT tres magnitudines AB. BE. BG. priores, & tres CD. DF. DH. posteriores, sitque tam prima priorum AB. maior ipsis BE. BG. quam CD. prima posteriorum maior ipsis DF. DH. sitque maior ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. minor autem ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. Dico maiorem esse rationem AE. differentiæ primæ, & secundæ, ad AG. differentiam primæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam sit ratio CF. differentiæ primæ, & secundæ, ad CH. differentiam primæ, & tertiæ in secundis magnitudinibus. Quoniam maior est ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & permutando maior ratio totius AB. ad totum CD. quam partis EB. ad partem FD. maior etiam erit ratio residui AE. ad residuum CF. quam totius AB. ad totum CD. & permutando maior ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD. Eodem modo cum minor sit ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. & permutando minor ratio totius AB. ad totum CD. quam partis GD. ad partem HD.



HD. erit & residui AG. ad residuum CH. minor ratio quam totius AB. ad totum CD. & permutando ac conuertendo maior ratio AB. ad AG. quam CD. ad DH. Cum igitur maior sit ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD.& maior ratio AB.ad AG. quam CD. ad DH. erit ex æqualitate maior ratio AE. ad AG. quam CF. ad CH. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam aperte ostenditur, minorem esse rationem differentiæ primæ, & secundæ magnitudinis, ad differentiam secundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in secundis: videlicet minorem esse rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. cum enim ostensum sit maiorem esse rationem AE. ad AG. quam CF. ad CH. erit per conuersionem rationis minor ratio AE. ad EG. quam CF. ad FH.

COROLLARIVM II.

Præterea sequitur minorem esse rationem secundæ magnitudinis, ad differentiam secundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in secundis: videlicet minorem esse rationem EB. ad EG. quam FD. ad FH. Nam cum posita sit ratio AB. ad BE. maior quam CD. ad DF. erit per conuersionem rationis, & diuidendo minor ratio BE. ad EA. quam FD. ad CF. sed AE. ad EG. (ex præcedenti Corollario) minorem habet rationem quam CF. ad FH. Igitur ex æquali, BE. ad EG. minorem habet rationem, quam DF. ad FH.

COROLLARIVM III.

Constat etiam maiorem esse rationem, AB. primæ quantitatis, ad GE. differentiam secundæ, & tertiæ, quam CD. ad HF. cum enim in superiori Corollario ostensum sit minorem esse rationem BE. ad GE. quam DF. ad FH. erit componendo, minor ratio

BG.

BG. ad GE. quam DH. ad HF. Et rursus cum sit minor ratio AB. ad BG. quàm CD. ad DH. erit ex æquali minor ratio AB. ad GE. quam CD. ad HF.

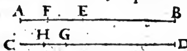
SCHOLIVM.

QVod si proposito prima ad secundam fuerit minor in primo ordine quàm in secundo, & prima ad tertiam maior, in primo quam in secundo, hinc etiam in conclusionibus seu demonstrationibus, versa maiori proportione in minorem, omnia eo modo sequentur, quo in propositione: vt si minor fuerit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. maior autem AB. ad BG. quam CD. ad DH. sequetur, vt in propositione, minorem esse rationem AE. ad AG. quàm CF. ad CH. in primo Corollario, minorem rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. In secundo, maiorem esse rationem BE. ad EG. quam DF. ad FH. in tertio denique maiorem rationem AB. ad GE. quam CD. ad HF.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI ex prima quantitate, quæ æqualis sit secundæ aut minor, auferantur tertia & quarta, & ex secunda, quinta & sexta, sitque tertia maior quam quarta & quinta, & quinta quam sexta, & differentia tertiæ & quartæ aut maior aut æqualis differentiæ quintæ & sextæ; maior erit ratio complementi quartæ ad complementum tertiæ, quam complementi sextæ, ad complementum quintæ.

SINT duæ quantiates æquales, prima AB. secunda CD. ex prima auferantur AE. tertia, & AF. quarta; Item ex CD. secunda demantur CG. quinta & CH. sexta, sitque AE. ipsa CG. maior, & differentia FE. maior, aut æqualis differentiæ HG. Dico maiorem esse rationem FB. complementi ipsius AF. ad EB. com-



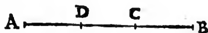
complementum ipsius AE. quam HD. complementi ipsius CH. ad GD. complementum ipsius CG. Quoniam enim ex æqualibus quantitatibus, AB. CD. inæquales demptæ sunt AE. maior CG. minor, supereſt EB. minor, GD. maior. Igitur minor eſt ratio BE. ad EF. quam BE. ad GH. & BE. ad GH. minor quam DG. ad GH. Igitur minor eſt ratio BE. ad EF. quam DG. ad GH. & componendo, ac per conuerſionem rationis, maior eſt ratio FB. ad BE. quam HD. ad DG. 5. axioma. 8.5. 8.5.

Idem etiam ſequetur, ſi FE. & HG. ponantur æquales, aut AB. minor quam CD. Quod euidentius eſt quam vt probatione indigeat.

LEMMA.

SI ſint tres magnitudines continue proportionales; habebunt differentiæ eandem rationem quam magnitudines.

SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione, quarum differentiæ ſint BC. CD. Dico eſſe vt AC. ad AD. ita BC. ad CD. Nam quoniam eſt vt AB. ad AC. ita AC. ad AD. erit diuidendo, & permutando vt BC. ad CD. ita AC. ad AD. ideſt AB. ad AC. quod erat demonſtrandum.



THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione maiori, ſintque priores poſterioribus maiores: maior erit ratio differentiæ magnitudinis primæ & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ,

quam magnitudinis primæ ad ſecundam, aut ſecundæ ad tertiam.

SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione maiori, ſitque BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, & CD. differentia ſecundæ & tertiæ, ſitque AB. maior quam AC. & AC. quam AD. Dico maiorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt BA. ad



10.5. CA. ita CA. ad AE. erit AE. minor quam AD. cadetque punctum E. inter D. & A. Quare cum ſit vt AB. ad AC. ita AC. ad
lēma precedens AE. erit vt BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, ad CE. differentiam ſecundæ & tertiæ, ita AB. ad AC. ſed
8.5. maior eſt ratio BC. ad CD. quam BC. ad CE. igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AB. ad AC: ſed etiam AB. ad AC. maior eſt quam AC. ad AD. Igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AC. ad AD. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione minori, ſintque priores poſterioribus maiores: minor erit ratio differentiæ primæ & ſecundæ magnitudinis, ad differentiam ſecundæ & tertiæ, quàm magnitudinis primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam.

SIT minor ratio AB. ad AC quam AC. ad AD. ſintque priores poſterioribus maiores, & differentiæ ſint BC. CD. Dico minorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut
10.5. AC. ad AD. Fiat vt AB. ad AC. ita CA. ad AE. erit AE. maior quam AD. & cadet inter D. & C. Erit igitur, per lemma
Lēma 15. huius. præcedens, eadem ratio BC. ad CE. quæ AB. ad AC. ſed ratio

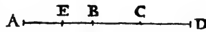
tio BC. ad CD. minor est quam ratio BC. ad CE. igitur minor 8.5.
est quàm ratio AB. ad AC. ideoque etiam quam AC. ad AD. quæ ratione AB. ad AC. minor posita est. Quod erat ostendendum.



THEOREMA XVII. PREPOS. XVII.

SI fuerint tres magnitudines in continua proportione maiori, sintque priores posterioribus minores; minor erit ratio differentiæ primæ magnitudinis & secundæ, ad differentiam secundæ & tertiæ, quam magnitudinis primæ ad secundam, aut secundæ ad tertiam.

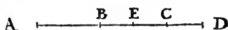
SIT maior ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. sintque priores posterioribus minores, & differentiæ sint BC. CD. Dico minorem esse rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. & AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC. minor erit AE. quam AB. cadetque punctum E. inter 10.5.
A. & B. Igitur cum sit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit, per lemma præcedens, vt AC. ad AD. ita EC. ad CD. sed BC. ad Lēma 15. huius
CD. minorem habet rationem quam EC. ad CD. 8. 5.
Igitur minorem habet rationem quam AC. ad CD. sed AC. ad AD. minorem habet quam AB. ad AC. igitur BC. ad CD. etiam minorem habet quam AE. ad EC. Quod erat, &c.



THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI fuerint tres magnitudines in continua proportione minori, & ordine minores; maior erit ratio differentiarum quàm magnitudinum.

SIT minor ratio AB. ad AC. quàm AC. ad AD. minorque sit AB. quam AC. & AC. quam AD. & differentiæ, vt prius BC. CD. Dico maiorem esse rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC.
10.5. erit AE. maior quam AB. cadetque inter pũcta BC. cum igitur sit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit per lemma 15. huius vt AC. ad AD.



8.5. ita EC. ad CD. sed BC. ad CD. maiorem habet rationem, quàm EC. ad CD. igitur etiam maiorem habet rationem quam AC. ad AD. sed etiam AC. ad AD. maiorem habet rationem quàm AB. ad AC. ergo BC. ad CD. maiorem habet rationem quam AB. ad AC. Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI fuerint tres quantitates in continua ratione maiori, & ordine maiores; duæ differentiæ cum tertia quantitate erunt in continua ratione maiori.

SINT tres quantitates AB. AC. AD. AB. maior quã AC. & AC. quam AD. maiorque sit ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. Dico maiorem esse rationem BC. ad CD. quam CD. ad DA.



Quoniam enim tres quantitates AB. AC. AD. sunt in continua propor-
15. huius tione maiori, maior erit ratio differentiæ BC. ad differentiam CD. quam CA. secundæ magnitudinis, ad DA. tertiam sed
8.5. CA. ad AD. maiorem habet rationem quam CD. ad AD. ergo multo maiorem habet BC. ad CD. quam CD. ad DA.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI fuerint quotcumque quantitates in continua proportione maiori, & ordine maiores; maior erit ratio primæ differentiæ ad ſecundam differentiam, quam vltimæ differentiæ ad vltimam magnitudinem.

SINT quatuor quantitates AB. CB. DB. EB. ſitque maior ratio AB. ad CB. quam CB. ad DB. & DB. ad EB. & AB. maior quam CB. & CB. quam DB. & DB. quam EB. Dico maiorem eſſe



rationem AC. ad CD. quàm DE. ad EB. Quoniam maior eſt ratio AC. ad CD. quam AB. ad CB. id eſt quam CB. ad DB. & DB. ad EB. at vero DB. ad EB. maior eſt quam DE. ad EB. maior ergo erit ratio AC. ad CD. quam DE. ad EB. Quod fuit demonſtrandum. 15. huius 8.5.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritq; prima maior quàm ſecunda, aut tertia: etiam differentia primæ & ſecundæ erit maior, quàm differentia tertiæ & quartæ.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam EB. maiorem rationem quam tertia CD. ad quartam FD. ſitque AB. maior quam AE. aut CD. Dico maiorem eſſe AE. differentiam primæ & ſecundæ, quàm CF. differentiam tertiæ & quartæ. Cum enim maior ſit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. erit eadem 10.5.



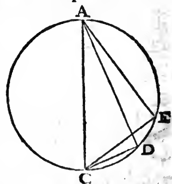
ad

ad maiorem aliquam BG. sit igitur vt AB. ad BG. ita CD. ad DF. erit per connersionem ra tionis vt AB. ad AG. ita CD. ad CF. & permutando vt AB. ad CD. ita AG. ad CF. Sed maior est AB. quam CD. ex hypothesi, igitur maior est AG. quam CF. & adhuc maior AE. quam CF. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

SI duo arcus circuli inæquales sint suis complementas ad idem punctum minores, singuli singulis; maiorem habebunt rationem quàm complementa, si maiores cum minoribus comparentur.

SIT circulus CEA. in quo arcus duo inæquales CD. minor, CE. maior, quorum complementa ad idem punctum A. sint arcus DA. minoris, EA. maioris, ille maior quam CD. hic quam CE. Dico maiorem esse rationem CE. ad CD. quam AD. ad AE. Cum. n. maior sit arcus AE. arcu EC. ideoque arcu CD. si duobus AE. CD. 1. huius addatur communis DE. maior erit ratio AE. ad CD. quã AD. ad CE. Et permutando maior AE. ad AD. Corol. quam CD. ad CE. ideoque maior 26. 5. CE. ad CD. quam AD. ad AE. Quod fuit ostendendum.

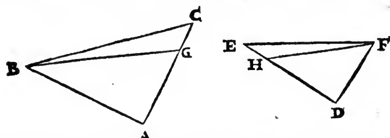


THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI sint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inęquales, quorum neuter sit obtusus; minor erit ratio lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppositum angu-

angulo ęquali in vno triangulo, quam lateris adiacentis angulo minori, ad latus oppoſitum angulo ęquali, in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC.DEF. quorum anguli ad A.D. ſint æquales, angulus vero ABC. maior quam DEF. ideoque 32.1.



ACB. minor quam DFE. nullus autem angulorum ad B. C. E. F. ſit obtuſus. Dico minorem eſſe rationem AB. lateris adiacentis angulo maiori ABC. ad latus BC. oppoſitum angulo æquali A. quam lateris DE. adiacentis angulo minori DEF. ad latus EF. oppoſitum angulo æquali D. Fiat angulus ABG. æqualis angulo DFE. erit triangulum ABG. æquiangulum 32.1.
triangulo AEF. Igitur angulus AGB. æqualis angulo DFE. cum vero angulus DFE. id eſt AGB. non ſit obtuſus, erit vel rectus vel acutus, ſi rectus erit eius complementum BGC. etiam 13.1.
rectus; ſi acutus erit angulus BGC. obtuſus, ergo angulus 32.1.
BCG. acutus; maius igitur latus BC. quam BE. Cum igitur in 19.1.
triangulis æquiangulis DEF. ABG. ſit vt DE. ad EF. ita AB. ad 4.6.
BG. habeat autem AB. ad BG. maiorem rationem quam AB. 8.5.
ad BC. etiam DE. ad EF. maiorem habebit rationem quam 13.5.
AB. ad BC. atque adeo minor eſt ratio lateris AB. ad latus BC. quam lateris DE. ad latus DF.

Eodem modo demonſtrabimus minorem eſſe rationem DF. ad FE. quam AC. ad CB. ſi fiat angulus EFH. æqualis angulo BCA. idem enim prorſus efficitur.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc sequitur; si sint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inæquales, quorum neuter sit obtusus, minor erit ratio lateris oppositi angulo minori, ad latus oppositum angulo æquali in vno triangulo, quam lateris oppositi angulo maiori, ad latus oppositum angulo æquali in alio triangulo. Sint enim superius duo triangula ABC. DEF. quorum anguli ad A. D. æquales, & angulus DFE. maior quam ACB. & angulus DEF. minor quam ABC. quorum nullus sit obtusus. Constat ex superius demonstratis minorem esse proportionem DF. ad FE. quam AC. ad CB. sed DF. opponitur angulo DEF. qui minor ostensus est quam ABC. Igitur minor est ratio lateris DF. oppositi minori angulo E. ad latus EF. oppositum vni æqualium D. quam lateris AC. oppositi maiori angulo B. ad latus BC. oppositi angulo æquali A.

COROLLARIVM II.

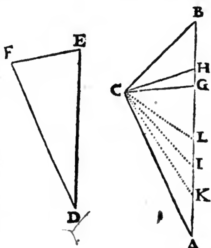
Rursus positis quæ superius, maior erit ratio lateris oppositi angulo æquali, ad latus oppositum angulo minori in vno triangulo, quam lateris oppositi alteri æqualium angulorum, ad latus oppositum maiori angulo. Ostensum enim est minorem esse rationem AB. ad BC. quam DE. ad DF. Igitur conuertendo maior erit ratio CB. oppositi vni angulorum æqualium A. ad latus AB. oppositum minori angulo C. quam lateris FE. oppositi alteri æqualium angulorum ad latus ED. oppositum maiori angulo DFE.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI sint duo triangula quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, habeat autem alterum ipsorum angulum quolibet angulo reliqui trian-

trianguli maiorem: maior erit ratio lateris oppositi angulo æquali, ad alterum latus adiacens angulo maximo, quam lateris oppositi angulo æquali, ad latus quodlibet reliquum in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC. DEF· quorum illud habeat angulum ACB. maiorem quolibet angulorum DEF. DFE. sintque anguli ad D. A. æquales. Dico maiorem esse rationem



lateris BC. oppositi vni angulorum æqualium A. in triangulo ACB. ad latus CA. adiacens angulo ACB. quam lateris FE. oppositi alteri angulorum æqualium D. ad quodlibet laterum DE. DF. Sint enim primum anguli F. E. non obtusi, & fiat angulus ACH. æqualis angulo DEF. cadet CH. intra triangulum, quod maior sit angulus ACB. angulo DEF. cumque æquales sint anguli D. A. æquiangula erunt triangula 32.1.
ACH. DEF: & anguli AHC. DFE. æquales, angulus autem DFE. ex hypothesi vel rectus est, vel acutus. Igitur etiam angulus AHC. vel rectus est vel acutus ac proinde eius complementum CHB. vel rectus vel obtusus, acutus igitur est CBA. idcoq; maior est recta CB. quam recta CH. Igitur etiam maior est ratio BC. ad CA. quam HC. ad CA. id est quam FE. ad ED. (cum similia sint triangula FED. HCA.) in altero triangulo. 13.1. 32.1. 19.1. 8.5. 13.5.

Rursus fiat angulus ACG. æqualis angulo EFD. eodem prorsus modo ostendemus æquiangula esse triangula DEF. AGC. & angulum AGC. angulo FED. esse æqualem, qui cum sit rectus aut acutus, erit CGB. rectus aut obtusus, sed B. ostensus est acutus; maius igitur latus CB. quàm CG. Quare

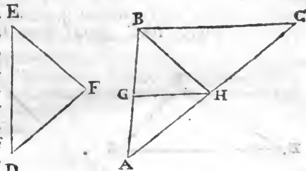
maior ratio BC. ad CA. quam CG. ad CA. id est quam EF.
ad FD. Quod erat ostendendum. Iam vero sit DEF. obtusus,
ex hypothesi minor quàm BCA. ac proinde DFE. acutus, fiat-
que angulus ACH. æqualis angulo DEF. erit angulus ad H.
æqualis angulo ad F. ex paulo ante demonstratis, ideoque acu-
tus, quare eo modo quo prius probabitur maiorem esse ratio-
nem BC. ad CA. quam FE. ad ED. Sed angulo FED. obtuso
fiat æqualis CGA. cum æquales sint anguli CGA. GAC. angu-
32.1. 4.6. lis FED. EDF. æquiangula sunt triangula FED. CGA. quare
& similia. Rursus maior est recta BC. quam recta CG. vt mox
ostendemus. Quare cum sit vt EF. ad FD. ita GC. ad CA. ma-
ior autem sit ratio BC. ad CA. quam GC. ad CA. maior etiam
erit ratio BC. ad CA. quam EF. ad FD. Quod vero CG. sit
minor quam CB. ita demonstramus. Sumatur CI. æqualis ipsi
CB. vel igitur punctum. G. cadit in punctum. I. vel vltra. I. ver-
sus A. vel inter I. & B. Cadat primum in punctum. I. si fieri po-
5.1. test, erunt anguli CIB. CBI. æquales cum igitur tam anguli
32.1. trianguli ABC. BCA. CAB. quam duo CIA. CIB. æquales sint
13.1. duobus rectis, ablatis æqualibus CBI. CIB. remanebunt duo
BCA. CAB. æquales angulo CIA. ergo angulus CIA. maior
est angulo ACB. sed angulo CIA. ponitur æqualis FED. ergo
angulo ACB. maior est angulus FED. quod est contra hypo-
thesim, qua ponebatur minor. Quod si dicatur cadere in
16.1. punctum K. inter I. & A. adhuc maior erit angulus ille, cum
maior sit angulus externus AKC. interno & opposito AIC. Si
19.1. vero cadat inter I. & B. vt in L. tunc CL. subtendens angulum
acutum CIL. minor est recta CI. subtendente angulum obtu-
sum CLI. atque etiam ei æquali CB. atque hoc modo in quod-
cumque punctum cadat ipsum G. ostendetur recta GC. minor
quàm CB. Quare sequetur quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex dictis colligitur si duo qualibet triangula comparentur, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, maiorem

esse

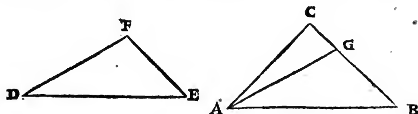
esse rationem lateris oppositi angulo æquali, ad latus adiacens angulo maiori in vno triangulo, quam lateris oppositi angulo æquali ad latus adiacens angulo minori in altero triangulo; & conuertendo, minorem esse rationem lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppositum angulo æquali, quam adiacentis angulo minori, ad oppositum angulo æquali; hoc enim duabus præcedentibus demonstratum est. Exclusimus.a.in Coroll. 23.huius, ex angulis inæqualibus, obtusum, non sine ratione. Potest enim contingere si alterum triangulorum sit amblygonium, vt non sit minor ratio lateris oppositi angulo minori, ad latus oppositum angulo æquali in vno triangulo, quam ratio lateris oppositi angulo maiori in altero, sed aliquando æqualis, aut maior. Sit triangulum ABC. obtusiangulum ad B.& oxygonium DEF.cuique angulus EDF. æqualis angulo BAC. fiatque angulus ABH.æqualis angulo DEF. erunt triangula DEF. ABH. æquiangula, ac similia. Ducatur HG. ipsi BC. parallela; Quod si fuerit GH. minor quam HB. aut angulus HGB.maior quam HBG. maior erit ratio AH. ad HG. id 8.5.
est AC. lateris oppositi angulo maiori ABC. ad CB. latus oppositum angulo æquali A.quam AH.ad HB. id est DF.latus oppositum angulo minori E. ad FE. latus oppositum angulo æquali D. Si 4.6.
vero HG. fuerit ipsi HB. æqualis & angulus HGB. angulo HBG. æqualis, erit vt AH.ad HG.id est vt AC.ad CB.ita AH.ad HB.scilicet DF. ad FE. Sin autem GH. fuerit maior, & angulus HGB. 4.6.
minor angulo HBG.minor erit ratio AH.ad HG.id est AC. ad CB. 8.5.
quam AH.ad HB.seu DF. ad FE.



THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo triangnla vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, reliquos inæquales: latus oppositum minori angulo vnius trianguli, ad latus oppositum maiori minorem habet rationem, quàm latus oppositum maiori angulo in alio triangulo, ad latus oppositum minori.

SINT duo triangula ABC. DEF. in quibus anguli ABC. DEF. æquales, reliquorum BAG. sit maior quam EDF. atque ideo DFE. maior quam ACB. Dico rationem lateris AB. oppositi angulo BCA. minori quam DFE. ad BC. latus oppositum angulo BAC. maiori quam EDF. esse mino-



rem ratione lateris DE. oppositi angulo maiori F. ad latus FE. oppositum angulo minori. D. Fiat angulus BAG. æqualis minori EDF. Cum æqualis positus sit angulus B. angulo
32.1. E. & factus angulus BAG. æqualis angulo D. ęquiangula erunt
4.6. triangula ABG. DEF. est ergo vt DE. ad EF. ita AB. ad BG. sed
8.5. AB. ad BG. maior est ratio quam AB. ad BC. Igitur etiam DE.
13.5. ad EF. maior est ratio quam AB. ad BC. atque adeo minor est ratio AB. ad BC. quam DE. ad EF.

CO-

COROLLARIVM.

Eodem modo oſtenditur, latus oppoſitum maiori angulo vnius trianguli, ad latus oppoſitum minori maiorem habere rationem, quam latus oppoſitum minori angulo in alio triangulo, ad latus oppoſitum maiori; oſtenſum enim eſt, maiorem eſſe rationem DE. ad EF. quam AB. ad BC.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

Arcuum inęqualium in Quadrante, tangens maioris ad tangentem minoris maiorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

IN circulo AED. cuius centrum G. diameter GA. ſecans circulum in A. ſit arcus maior AD, minor AE. & ex puncto A. ducatur ipſi GA. perpendicularis AC. tangens circulum in A. quam productam quantumlibet ſecent rectæ ex G. centro per puncta E.D. ductæ, in punctis B. C. erit AC. tangens maioris arcus, & AB. minoris, ex definitione tangentium. Dico maiorem eſſe rationem CA. ad AB. quam arcus DA. ad arcum AE. Ducatur ex E. termino minoris arcus ad AG. perpendicularis EF. quæ producta ſecet rectam GC. in puncto I. Quoniam minor eſt proportio trianguli FGE. ad triangulum EGI. quam ſectoris 8.5.
AGE. ad idem triangulum EGI. & rurſus minor eſt proportio ſectoris AGE. ad triangulum EGI. quàm eiuſdem ſectoris 8.5.
AGE. ad ſectorem EGD. minor erit proportio trianguli FGE. Schol.
ad triangulum EGI. quam ſectoris AGE. ad ſectorem EGD. 13.5.
Sed vt triangulum FGE. ad triangulum EGI. ita recta 1.6.
FE. ad rectam EI. & vt ſector AGE. ad ſectorem EGD. ita ar- 33.6.
cus

cus AE. ad arcum ED. minor igitur erit ratio FE. ad EI. quam arcus AE. ad arcum AD. Quare conuertendo, & componendo, maior erit proportio FI. ad FE. id est. CA. ad AB. quam arcus AE. ad arcum AB. Quod erat demonstrandum.

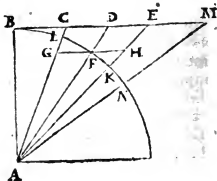
SCHOLIVM.

IN sequentibus propositionibus sæpe nominibus chordarum, sinuum, tangentium, secantium vtemur quorum licet pleraque vetustioribus mathematicis incognita fuerint, a recentioribus tamen passim vsurpantur, in triangulorum præsertim calculis, quæ nos etiam ad Geometricas demonstrationes traducemus, vt breuitati, ad quam mirum momentum habent, consulamus: multa enim, quæ longis ambagibus describenda essent, vnico verbo complectemur. Horum definitiones qui ignorat, reperiet apud Io. Regiomontanum lib. 1. de triangulis definit 12. & 13. Christophorum Clauium tractatu de sinubus; Maginum, Pitiscum, Landsbergium, & alios quotquot de triangulis rectilineis ac sphæricis scripserunt.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

DIfferentia tangentium remotior à punto contactus ad vicinorem maiorem habet rationē, quam arcus illi respondens ad arcum.

IN Quadrante ABI. ducatur tangens BM., & sumantur quotlibet arcus BL. LF. FK. KN. quorum primi propiores sint puncto contactus B. & per puncta L. F.K. N. ducantur secantes AC. AD.AE.AM. erunt DC. ED. ME. differentiæ tangentium, quarum primæ viciniores sunt puncto contactus B. Dico maiorem esse rationem ED. ad DC. quam arcus KF. ad arcum FL. & maiorem ipsius ME. ad DC. quam arcus NK. ad arcum FL. Vel enim



dif

differentiæ illæ coniunctę sunt, vel separatæ: sint primo con-
iunctæ, ac per punctum F. in quo AD. circulum secat ducatur
HG. ipsi MB. parallela secans AE. AC. in punctis H. G. Quo- 8.5.
niam minor est ratio trianguli GAF. ad triangulum FAH.
quam sectoris LAF. ad idem triangulum FAH. & adhuc minor
est ratio sectoris LAF. ad triangulum FAH. quam eiusdem se-
ctoris LAF. ad sectorem FAK. minor erit ratio trianguli GAF. 13.5.
ad triangulum FAH. quam sectoris LAF. ad sectorem FAK.
ideoque maior erit ratio sectoris LAF. ad sectorem FAK. id est 33.6.
arcus LF. ad arcum FK. quam trianguli GAF. ad triangulum
FAH. id est quam GF. ad FH. ergo maior ratio HF. ad FG. id 1.6.
est rectæ ED. ad rectam DC. quam arcus KF. ad arcum FL. 4.6. Cor.
quod prius demonstrare oportebat. 16.5.

Sint secundo differentiæ illæ, vt ME. DC. separatæ intermedia ED. cum maior sit ratio ME. ad ED. ex paulo ante demonstratis, quam NK. ad KF. & ratio ED. ad DC. etiam probata sit maior quam KF. ad FL. erit ex æqualitate maior ratio ME. ad DC. quam NK. ad FL. Quod secundo erat demonstrandum. Igitur differentia tangentium &c.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI ex puncto vbi diameter circulum secat duo arcus inæquales sumantur, ex quorum extremis ad diametrum duæ inter se parallelæ ducantur; maior erit ratio maioris arcus ad minorem, quàm lineæ ductæ ab extremo maioris arcus, ad eam quæ ab extremo minoris ducta est.

EX puncto B. vbi diameter AB. circulum BCD. secat, sumantur duo arcus inæquales BC. minor BD. maior, ex quorum extremis C. D. ducantur parallelæ CF. DG. secantes diametrum in punctis F. G. Dico maiorem esse rationem arcus BD. ad arcum BC. quam rectæ DG. ad rectam CF. Connectantur

tur puncta CD. recta DCE. quæ vel concurret cum diametro producta, vt in prioribus figuris, vel erit parallela vt in poste-

E H F C I G D A

E H B C F A I G D

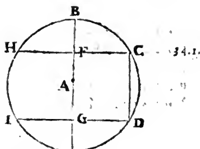
riori. Concurrat primo ex parte arcuum sumptorum in E. &
8.5. ducantur AC. AD. Quoniam minor est ratio sectoris BCA. ad sectorem ACD. quam trianguli ECA. ad eundem sectorem ACD. & adhuc minor trianguli ECA. ad sectorem ACD. quàm trianguli ECA. ad triangulum CDA. multo minor erit ratio se-
13.5. ctoris BCA. ad sectorem ACD. id est, arcus BC. ad arcum GD.
33.6. quam trianguli ECA. ad triangulum CDA. id est rectæ EC. ad
1.6. rectam CD. & conuertendo, ac componendo, maior ratio ar-
4.6. cus DB. ad arcum BC. quam DE. ad EC. id est, quam DG. ad CF.

Concurrat secundo DC. non ex parte arcuum sumptorum, vt in tertia figura sed in parte opposita, sitque FC. maior quam GD. Constat maiorem esse rationem arcus DB. ad arcum BC. cum sit maioris inæqualitatis, quam GD. ad FC. quæ proportio minoris inæqualitatis est.

B H F C A G I D E

Si

Si vero DC. sit parallela ipsi AB. cum parallelæ etiam sint FC. GD. æquales erunt FC. GD. cum ergo maior sit arcus DB. quam BC. maior erit ratio arcus DB. ad arcum CD. maioris inæqualitatis, quam ratio GD. ad FC. quæ æqualitatis est. Quod erat demonstrandum. 34.1.



COROLLARIVM I.

Hinc patet, quod arcus maior ad minorem maiorem habet rationem, quam sinus rectus arcus maioris, ad sinum rectum minoris. Si enim tam CF. quam GD. sint ad diametrum perpendiculares, manifestum est ex definitione sinus, rectam CF. esse sinum rectum arcus BC. & rectam DG. sinum rectum arcus BD. ostensum autem est maiorem esse rationem arcus BD. ad arcum BC. quam recta DG. ad rectam CF.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam deducitur maiorem esse rationem arcus ad arcum, quam subtensæ seu chordæ maioris arcus ad chordam minoris. Sint enim duo arcus DBI. CBH. ille maior, hic minor, quorum chordæ DI. CH. qui diuidantur bifariam, 3.3.
& ad rectos à diametro BA. in punctis G.F. Eodem modo ostendemus maiorem esse rationem DB. ad BC. quam DG. ad CF. & ter- 15.5.
minorum proportionis duplicatione, maiorem esse rationem arcus DBI. ad arcum CBH. quam chordæ DI. ad chordam CH.

COROLLARIVM III.

Præterea sequitur ex demonstratis maiorem esse rationem arcus maioris ad minorem, quàm secantis complementi minoris arcus, ad secantem complementi maioris. Est enim, vt mo-

do demonstratum est, maior ratio arcus maioris ad minorem quam sinus recti maioris ad sinum rectum minoris, ut autem sinus rectus arcus maioris ad sinum rectum minoris, ita secans complementi arcus minoris ad secantem complementi maioris. Igitur maior est ratio arcus maioris ad minorem, quam secantis complementi minoris ad secantem complementi maioris.

Clauius. 22. de secantibus.

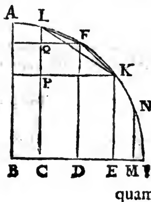
COROLLARIVM IV.

Denique constat si ex puncto quolibet diametri producta ducatur recta circulum secans, maiorem esse rationem partis illius recta extra circulum ad eam qua circuli arcum subtendit, quàm arcus diametro & secante comprahensus ad arcum quē pars secantis subtendit: ostensum enim est maiorem esse rationem EC. ad CD. quam arcus BC. ad arcum CD.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

Differentia tam sinuum rectorum quam versorum vicinior centro circuli ad remotiorem maiorem habet rationem, quam arcus cui differentia subtenditur, ad arcum.

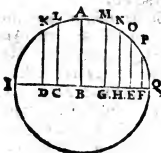
IN Quadrante ABI. cuius centrum B. latera BA. BI. sumantur quotlibet arcus IN. IK. IF. IL. IA. & ducantur sinus recti NM. KE. FD. LC. AB. paralleli diametro AB. erunt MI. EI. DI CI. sinus versi dictorum arcuum. Rursus arcuum AL. AF. AK. AN. AI. sinus recti erunt rectæ BC. BD. BE. BM. BI. & ME. ED. DC. differentiæ tam sinuum rectorum quã versorum. Dico maiorem esse rationem CD. quæ vicinior est centro B. ad DE. quæ remotior est, quam



quam arcus LF. ad arcum FK. Item maiorem esse rationem DC. ad ME. quam arcus FL. ad NK. Ducantur chordæ KF. FL. KL. Item ex F. & K. perpendiculares ad AB. rectæ FG. KH. secantes CL. in punctis P.Q. Quoniam in triangulis rectangulis KPL. FQL. maior est angulus QLF. angulo PLK. minor erit reliquus QFL. reliquo PKL. Igitur minor est ratio PK. ad KL. quam QF. ad FL. & permutando minor ratio KP. ad FQ. id est EC. ad DC. quam KL. ad LF. sed KL. chorda arcus KL. ad FL. chordam arcus FL. minorem habet rationem quam arcus KL. ad arcum FL. Igitur recta EC. ad rectam CD. minorem habet rationem, quàm arcus KL. ad arcum FL. & diuidendo, & conuertendo, maiorem habet rationem DC. ad DE. quam arcus FL. ad arcum FK. Atque eodem prorsus modo demonstrabitur maiorem esse rationem DE. ad EM. quam arcus FK. ad arcum KN. & EM. ad MI. quam KN. ad NI. Sed non sint differentiæ coniunctæ, vt DC. ac ME. Rursus cum maiorem habeat rationem DC. ad DE. quàm arcus FL. ad arcum FK. Item etiam maiorem habeat DE ad EM. quã arcus FK. ad arcũ KN. habebit ex æqualitate DC. ad ME. maiorem rationem quam arcus FL. ad arcum KN.

32.1. 23. huius. 34.1. Cor. 2.28. huius 13.5.

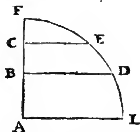
Denique sint dictæ differentiæ in diuersis Quadrantibus, vt differentia DC. in Quadrante BAI. & differentia EF. in Quadrante BAQ. illa vicinior, hæc remotior à centro: sumantur rectæ BG. BH. æquales ipsis BC. BD. erunt DC. GH. æquales & EF. remotior à centro quam GH. quare maior erit ratio GH. ad EF. quam arcus MN. respondentis ipsi GH. ad arcum OP. respondentem differentiæ EF; vt probatum est prima parte huius, sed differentiæ GH. æqualis est differentia DC. & arcui MN. arcus KL. Igitur maior est ratio DC. ad EF. quam arcus KL. ad arcum OP. Quod erat demonstrandum. 28.3.



THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

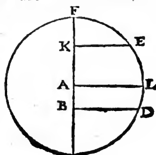
SI sint duo arcus inæquales, minor vterque Quadrante, aut alter maior alter minor; maior ad minorem minorem habet rationem, quàm sinus versus maioris ad sinum versum minoris.

IN circulo FEL. sumantur primum duo arcus in Quadrante FL. (cuius cētrum A. duæ diametri perpendiculares AF. AL.) scilicet DF. maior & EF. minor. Ex punctis E. D. in diametrum AF. ducantur sinus recti DB. EC. erit BF. sinus versus maioris arcus DF. & CF. sinus versus minoris EF. Dico maiorem esse rationem BF. ad FC. quam arcus DF. ad arcum FE. Est enim FC. differentia FA. sinus recti Quadrantis FEL. & sinus recti CA. arcus EL. Item CB. est differentia sinus recti CA. arcus EL. & sinus recti AB. arcus DL. Igitur maior est ratio differentiæ BC. vicinioris centro, ad differentiam CF. remotiorem, quam arcus DE. ad arcum EF. & componendo, maior est ratio BF. ad FC. quam DF. ad FE.



29. huius

Sit secundo arcuum alter maior Quadrante, alter minor: vt, arcus FE. sit minor Quadrante FL. & arcus FD. maior eodem Quadrante. Ductis sinibus rectis EK. LA. DB. erit KF. sinus versus arcus FE. & BF. sinus versus arcus FD. Item AF. sinus rectus Quadrantis FL. & AB. sinus rectus arcus LD. Dico maiorem esse rationem BF. ad KF. quam arcus DF. ad arcum EF Quoniam maior est arcus FL. arcu LD. maior erit ratio arcus FL. ad arcum



Cor. 1. 28. huius

cum LD. quam FA. ſinus recti arcus FL. ad AB. ſinum rectum arcus LD. Igitur maior ratio AB. ad AF. quam arcus LD. ad arcum FL. & componendo maior ratio BF. ad FA. quam DF. ad FE. ſed FA. ad FK. maiorem habet rationem quam LF. ad FE; vt prima parte huius propoſitionis demonſtratum eſt, ergo ex æquali maior eſt ratio BF. ad FK. quam ſinus DF. ad FE. ideoque minor ratio arcus DF. ad arcum FE. ſinus quam verſi BF. ad ſinum verſum KF. Quod ſecundo loco erat oſtendendum. Cor. 16.5.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXI.

CIrculum ita ſecare, vt ſinus verſi arcuum Quadrante maiorum maiorem habeant rationem, quam arcus; ſi maiores cum minoribus comparentur.

CENTRO L. deſcribatur circulus ABC. cuius diame-

ter

ter AC. & ex L. ducta perpendicularis LB. fecet circulum in duos Quadrantes AB. BC. & sumatur arcus BD. qui sit tertia pars Quadrantis. Item ex D. recta DM. perpendicularis diametro AC. Ex punctis autem D. & B. ducantur duæ rectæ DH. BI. tangentes circulum in punctis D.B.& occurrentes rectis LB. MD. productis in H. I. ac secantes se in puncto F. Per punctum F. ex puncto C. ducatur CFK. recta secans MD. productam in K. & circulum in O. & LB. in G.& ex O. ducatur ad diametrum perpendicularis ON. erunt MC. NC. sinus versi arcuum DC. OC. quadrante maiorum. Dico maiorem esse rationem MC. ad NC. quam arcus DBC. ad arcum OBC. Connectatur LF. secans circulum in E. Quoniam triangula LDF. LBF. rectum angulum LDF. recto LBF. æqualem habent, estque vt DL. ad LF. ita BL. ad LF.& quilibet reliquorum
32.1. angulorum DFL. BFL. minor recto, æquales erunt anguli
7.6. DLE. BLE. ideoque æquales arcus DE. BE. ac cum DB. sit
26.3. pars tertia Quadrantis, erit DE. sexta pars eiusdem, ac proinde in triangulo rectangulo LDH. erit angulus DLH. tertia pars recti, & DHL. duæ tertiæ; ideoque in triangulo etiam rectangulo FBH. erit tam angulus HFB. quam ad verticem IFD. tertia pars, id est quinque decimæ quintæ vnius recti. Rursus in triangulo rectangulo GCL. angulum GCL. id est OCA. metitur medietas arcus AO. quare cum arcus AD. sit duæ tertiæ quadrantis, & DE. sexta pars quadrantis, erit eorum medietas vna tertia, & vna duodecima Quadrantis, id est quinque duodecimæ ipsius Quadrantis; maior autem est
29.1. arcus AO. quam AE. Igitur angulus OCA. id est GCL. id est
15.1. GFB. id est IFK. maior est quinque duodecimis vnius recti. Est autem demonstratum angulum IFD. continere tantum quinque decimas quintas vnius recti. Igitur maior est angulus IFK. angulo IFD. Quare posito eodem sinu toto FI. maior est secans KF. maioris anguli, secante FD. minoris; quibus si communis addatur FO. maior erit KO. quam duæ DF. FO. at
Archimedes. vero duæ rectæ DF. FO. maiores sunt arcu DO. (vt mox probabimus) maior igitur est recta KO. arcu DO. minor autem

est

est chorda OC. arcu OBC. Igitur maior est ratio rectæ KO. ad 8.5.
rectã OC. quam eiusdem KO. ad arcum OBC. & KO. ad arcum
OBC. maior quam arcus DO. (qui minor est recta KO.) ad 13.5.
arcum OBC. Igitur maior est ratio KO. ad OC. quam arcus 2.6.
DO. ad arcum OBC. sed vt KO. ad OC. ita MN. ad NC. Igitur maior est ratio MN. ad NC. quam arcus DO. ad arcum OBC. & componendo maior ratio MC. ad NC. quam arcus DC. ad arcum OC. Quod erat demonstrandum.

Quod verò maiores sint DF. FO. quam arcus DO. ita probatur. Connectatur LO. & ducatur recta OP. tangens circulum in O. & secans LE. in P. supra punctum E. Cum in triangulo rectangulo LOP. angulus LOP. sit rectus, erit LPO. acu- 32.1.
tus, ergo in triangulo OPF. angulus OPF. obtusus; maius igitur est latus FO. latere PO. At vero maior est tangens DF. Archimedes.
arcu DE. & tangens OP. arcu EO. Igitur duæ tangentes DF. 1. de
PO. sunt maiores arcu DO. Sed duabus tangentibus DF. sphæra & cy-
PO. maiores sunt probatæ DF. FO. & ipsis DF. FO. ostensa lindro
est maior KO. Igitur maior est KO. quam arcus DO.

SCHOLIVM.

Potest etiam demonstrari, si punctum aliquod sumatur inter N. & L. vt punctum Q. & ducatur sinus rectus QR. maiorem esse rationem sinus versi MC. ad sinum versum QC. quam arcus DBC. ad arcum RBC. si enim non sit maior ratio MC. ad CQ. quam DBC. ad RBC. sit minor aut æqualis, ac ponatur primum minor. Cum maior sit ratio 31.
MC. ad CN. quam arcus DC. ad arcum CO. minor autem ratio MC. ad huius
CQ. quam DC. ad CR. Igitur, ex 13. huius, maior erit ratio MN. ad 13. huius
MQ. quam arcus DO. ad arcum DR. & conuertendo, minor ratio QM. ad MN. quam RO. ad DO. & diuidendo, minor ratio QN. ad NM. 29.
quam RO. ad OD. quod est absurdum, ostensum enim est propositione 29. huius
huius, maiorem esse rationem QN. ad NM. quam RO. ad OD.

Sed dicatur ratio MC. ad CQ. eadem esse rationi DC. ad CR. Quoniam est vt MC. ad CQ. ita DC. ad CR. erit per conuersionem rationis, & conuertendo, vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. Iterum MC. ad CN. maiorem habet rationem quam DC. ad CO. vt in propositione ostensum est, erit per conuersionem rationis, minor ratio MC. ad MN. quam DC.

ad

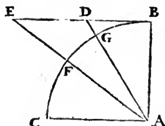
ad DO. Quare cum ſit vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. & MC. ad MN.
Schol. *minorem habeat rationem quam DC. ad DO. ex æqualitate, minor erit*
32.5. *ratio MQ. ad MN. quam DR. ad DO. & diuidendo minor ratio QN. ad*
29. *NM. quam RO. ad OD. Quod eſt abſurdum, cum ex 29. huius, maior*
huius *ſit ratio QN. ad NM. quam RO. ad OD.*

In hoc problemate aſſumpſimus principium Archimedis, chordam eſſe arcu minorem, tangentem eodem maiorem, quod ſi ideo minus Geometricum videtur, ſaltem idem momentum habeat, quod multæ Archimedis propoſitiones ex illo fonte deriuatæ, quibus cum fidem hactenus nemo niſi ἀγεωμέτρητος abrogarit, neque noſtram iiſdem natalibus ortam, tanquam ſpuriam quiſquam reijciet.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXII.

TAngentis maioris arcus, ad tangentem minoris, maior eſt ratio, quam ſecantis maioris arcus ad ſecantem minoris.

IN Quadrante ABC. cuius centrum A. diameter AB. maioris arcus BF. ſit tangens EB. ſecans AE. & minoris arcus BG. ſit tangens DB. & ſecans AD. Dico maiorem eſſe rationem EB. ad DB. quam AE. ad AD.



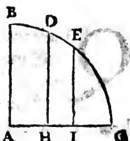
16.1. Cum enim in triangulis rectangulis ABD. ABE. maior ſit angulus ADB. externus interno
23. huius AEB. minor erit ratio BD. ad DA. quam BE. ad EA. & permutando, ac conuertendo, maior erit ratio EB. ad BD. quam AE, ad AD. Quod oſtendendum erat.

PROBLEMA II. PROPOS. XXXIII.

QVadrantem ita ſecare in duos arcus, vt ſinus verſi æqualem, minorem, maioremue ratio-

tionem habeant, quam aut ſecantes eorumdem arcuum, aut ſinus recti complementorum, minorem vero quam tangentes eorumdem arcuum, ſi maiores cum minoribus comparentur.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. diametri inuicem perpendiculares, AB. AC. Sumatur primum recta AH. æqualis rectæ IC. & ducantur perpendiculares ad AC. rectæ HD. IE. ſecantes peripheriam Quadrantis in D. F. erit AH. ſinus rectus arcus. BD. & AI. ſinus rectus arcus. BE. at vero IC. erit ſinus verſus arcus EC. & HC. ſinus verſus arcus DC. qui duo poſteriores arcus priorum ſunt complementa. Dico eandem eſſe rationem ſinus verſi HC. ad ſinum verſum IC. quæ eſt ſinus complementi IA. ad ſinum complementi HA. Cum enim æquales ſint AH. IC. addita communi AH. æquales erunt HC. IA. vt igitur ſinus verſus HC. ad ſinum verſum IC. ita ſinus rectus IA. ad ſinum rectum HA. vt vero IA. ad HA. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. vt a Clauio demonſtratum eſt. prop. 22. de ſecantibus. Igitur vt ſinus verſus HC. arcus DC. ad ſinum verſum IC. arcus EC. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC.



2. Pron.

Clauius p. 22. de tangentibus.

Sit ſecundo ſinus verſus CI. maior ſinu recto HA. addatur communis IH. Quoniam duabus lineis inæqualibus maiori CI. minori HA. eadem quantitas IH. addita eſt, habebit per primam huius HC. ad CI. minorem rationem quam IA. ad HA. & quam ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam oſtendimus modo eandem habere rationem quam IA. ad HA. 1. huius.

Sit tertio ſinus verſus IC. minor ſinu recto HA. addita communi HI. eodem modo, ex prima huius, demonſtratur; maiorem eſſe rationem HC. ad IC. quam IA. ad HA. aut quam ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. 1. huius.

F Deni-

23. huius. Deniq; cum maiorem habeat rationem tangens arcus DC. ad tangentem arcus EC. quam ſecans eiuſdem arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ſecantes autem dictorum arcuum in duobus prioribus caſibus aut maiorem, aut æqualem rationem habeant, quam ſinus verſi eorumdem arcuum, habebit tangens
13. 5. arcus DC. ad tangentem arcus EC. maiorem rationem, quam HC. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinum verſum arcus EC. Igitur quadrantem ita ſecauimus vt &c.

PROBLEMA III. PROPOS. XXXIV.

Quadrantem ita ſecare in duos arcus, vt tam ſecans maioris ad ſecantem minoris, quam ſinus rectus complementi minoris, ad ſinum rectum complementi maioris, maiorem habeant rationem, quam arcus maior ad minorem.

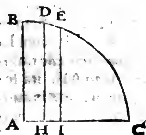
Fiant omnia quæ in duobus primis caſibus præcedentis propoſitionis. Dico maiorem eſſe rationem IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad
33 huius. Clau. p. 22. de ſecantibus. arcum EC. Cum enim, in primo caſu, ſit vt IA. ad AH. id eſt vt ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ita HC. ſinus ver-
30. huius. ſus arcus DC. ad IC. ſinũ verſum arcus EC. maior autem ſit ra-
13. 5. tio HC. ad IC. quam DC. ad EC. etiam IA. ad HA. & ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. maiorem habebunt rationem, quam arcus DC. ad arcum EC.
33. huius. Eadem, ac validiori ratione, in ſecundo caſu: cum maior ſit ratio IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam HC. ad IC. & HC. ad IC. maior quam arcus DC.
13. 5. ad arcum EC. maior erit ratio IA. ad HA. & ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam ipſius arcus DC. ad arcum EC. Quare Quadrantem ita ſecauimus &c.

THEO-

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXV.

SInus recti duorum arcuum, quorum aut vterque minor est tertia parte Quadrantis, aut alter tertiæ parti Quadrantis æqualis, alter minor; maiorem habent rationem, quam arcus complementorum, si maiores cum minoribus comparentur.

Sit Quadrans ABC. cuius latera AB. AC. centrum A. in eo sumantur duo arcus inæquales BD. minor DE. maior, sitq; BD. minor tertia parte Quadrantis, & BE. aut æqualis tertiæ parti Quadrantis aut minor: & ducantur ad oppositum latus Quadrantis perpendiculares DH. EI. erit AH. sinus rectus arcus BD. & AI. sinus rectus arcus BE. Item erit arcus DC. complementum arcus minoris BD. & EC. complementum arcus maioris BE. arcuumque DE. EC. sinus versi HC. IC. Dico maiorem esse rationem IA. ad AH. quam arcus DC. ad arcum EC. Nam si BE. sit tertia pars Quadrantis, erit AI. æqualis ipsi IC. Si vero BE. sit minor tertia parte Quadrantis erit AI. minor quam IC. ac proinde AH. pars ipsius AI. erit multo minor quam IC. Quoniam igitur IC. maior est, quam AH. & addita est vtrique quantitas æqualis, imo eadem HI. maior est ratio CI. ad AH. quam CH. ad AI. & permutando maior ratio CI. ad CH. quam AH. ad AI. ideoque maior AI. ad AH. quam CH. ad CI. at CH. sinus versus arcus DC. ad IC. sinum versum arcus EC. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Igitur AI. ad AH. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Quod erat demonstrandum.



1. huius.

30. huius.

13. 5.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXVI.

SEcantes duorum arcuum inæqualium, quorum aut vterque ſit maior duabus tertijs Quadrantis, aut alter maior, alter æqualis; maiorem habent rationem, quam arcus ad arcum: ſi maiores cum minoribus conferantur.

In figura ſuperioris propoſitionis ſint ſinguli arcus EC. DC. maiores duabus tertijs Quadrantis, erunt tam EB. quam DB. minores vna tertia. Vel ſit. EC. duæ tertiæ erit CD. maior vna tertia, ac EB. vna tertia, BD. minor vna tertia. Dico maiorem eſſe rationem ſecantis DC. ad ſecantem EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Nam ſuperiori propoſitione oſtenſum eſt maiorem eſſe rationem IA. ad AH. quam DC. ad EC. ſed vt IA. ad AH. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. Igitur maior eſt ratio ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Quod fuit probandum.

Clau. p. 22. de ſecantibus.

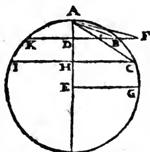
THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterque ſit minor Quadrante, aut alter minori differentia Quadrantem excedat, quam alter ab eodem deficit; ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris maiorem habet rationem, quam tangens dimidij maioris ad tangentem dimidij minoris; & chorda maioris, ad chordam minoris maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris. Quod ſi defectus fuerit æqualis, æqualis erit proportio, ſi exceſſus defe-

ctum

ctum superet, aut vterque arcus fuerit maior Quadrante, minor erit proportio eorumdem sinuum versorum inter se, quam tangentium; & chordarum, quam secantium.

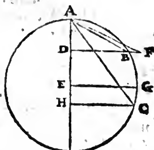
IN circulo ABG. cuius centrum E. diameter AE. secans circulum in A. sit arcus maior AC. minor AB. illius chorda AC. huius AB. illius sinus rectus CH. huius BD. secantes diametrum AE. in punctis HD. erit HA. sinus versus maioris arcus AC. & DA. sinus versus arcus minoris AB. sitque primum vteruis arcus minor quadrante. Dico maiorem esse rationem HA. ad AD. quam tangentis dimidij arcus CA. ad tangentem dimidij AB. & maiorem AC. chordæ ad AB chordam, quam secantis dimidij arcus AC. ad secantem dimidij arcus AB. Producatur DB. quantum libet, & accipiatur DF. æqualis sinui HC. qui cum sit maior quam DB. cadet punctum F. vltra B. extra circulum, & connectatur AF. erit angulus ACH. dimidius anguli AEC. id est arcus AC. (productis enim rectis BD. CH. in circumferentię puncta K.I. angulus ACI. in sistit arcui AI. qui arcui AC. est æqualis, & Angulus ABD. arcui AK. æquali ipsi AB.) & angulus ABD. dimidius anguli AEB. seu arcus AB. atque in triangulis rectangulis CHA. FDA. posito sinu toto CH. aut FD. illi æquali, erit HA. tangens anguli HCA. id est, medietatis arcus AC. & eius secans CA. Item DA. tangens anguli DFA. & FA. eius secans. Iam vero, quæ proportio HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. eadem est HA. tangentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA. nam vtrobique est proportio æqualitatis: sed angulus AFD. minor est angulo ABD. minor est igitur tangens anguli AFD. tangente anguli ABD. Igitur maior est proportio HA. tãgentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA.



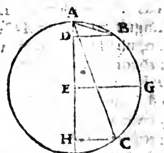
quam

quam ad tangentem anguli DBA. sed vt HA. tangens anguli HCA. id est dimidij arcus AC. ad DA. tangentem anguli DFA. ita ostensus est HA. sinus versus arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. Igitur maior est proportio HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. quam HC. tangentis anguli HCA. seu medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. seu medij arcus AB.

Sed sit arcus AC. maior quadrante, & ducta EG. perpendiculari ad diametrum AE. minor sit arcus CG. quo quadrantem superat; quam arcus BG. quo arcus AB. differt à Quadrante. Rursus cum sinus HC. sit maior quã DB. cadet punctũ
15.3. F. vltra punctum B. extra circulum; eodem prorsus modo quo prima parte huius, ostendemus HA. sinum versum Arcus AC. ad AD. sinum versum arcus AB. maiorem habere rationem, quam HA. tangentem medij arcus AC. ad tangentem medij arcus AB.



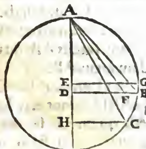
Sit secundò arcus GC. arcui GB. æqualis, ideoque rectæ DB. HC. æquales, cadatque punctum F. in ipsum C. Dico eamdem esse rationem HA. sinus versi arcus AC. ad DA. sinum versum arcus DA. quæ tangentis anguli HCA. id est medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. seu medij arcus AB. Nam cum in triangulis rectangulis æquales sint sinus toti HC. DB. erit HA. tangens anguli HCA seu dimidij arcus AC. & CA. eiusdem secans: item DA. erit tangens anguli DBA. seu medij arcus AB. & AB. eiusdem secans. Vt igitur HA. sinus versus arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. ita HA. tangens dimidij, ad DA. tangentem dimidij.



In super sit arcus GC. quo ma-

ior

ior arcus quadrantem superat, maior arcu GB. quo minor à Quadrante superatur: erit HC. magis distans à diametro, minor quam DB. quæ minus distat. Igitur sumpta DF. æquali ipsi HC. cadet punctum F. inter D. & B. erit rursus HA. tangens anguli HCA. & DA. tangens anguli DFA. qui cum sit maior, quam angulus DBA. minor erit ratio tangentis HA. anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. quam ad tangentem anguli DBA. sed vt HA. tangens Anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. ita HA. sinus versus arcus AC. ad DA. sinum versum arcus AB. Igitur HA. tangens anguli HCA. id est dimidij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. seu medij arcus AB. maiorem habet rationem, quam dictus sinus versus HA. ad sinum versum DA. 15.3.



Denique sint arcus AB. AC. vterque maior Quadrante: AB. minor & AC. maior: erit recta DB. vicinior diametro maior quam HC. sumpta igitur DF. æquali ipsi HC. quæ cadat inter puncta D.B eodem rursus modo quo proxima parte, ostendemus maiorem esse proportionem tangentis dimidij arcus maioris, ad tangentem dimidij minoris, quam sinus versi arcus maioris ad sinum versum minoris. 15.3.



Iam vero, quoniam in primo casu maior est angulus ABD. angulo AFD. maior erit secans anguli ABD. recta AF. secante anguli AFD. Rursus, cum acutus sit angulus ABD. quia ADB. rectus; obtusus erit ABF, ideoque AF. maior quam AB. maiorem igitur rationem habebit chorda CA. arcus AC. ad chordam BA. arcus AB. quam secans AC. anguli ACH. id est dimidij arcus AC. ad secantem anguli ABD. seu dimidij arcus AB. 1. 16. 32. 1. 13. 1. 19. 1. 8. 5.

In

In ſecundo vero caſu cum CA. ſit & ſecans anguli ACH. & chorda arcus AC. item BA ſecans anguli ABD. & chorda arcus AB. Eandem habebit rationem CA. ſecans Anguli ACH. id eſt dimidij arcus AC. ad BA. ſecantem Anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. quam CA. chorda arcus AC. ad BA. chordam arcus AB.

In vltimis caſibus Quoniam maior eſt angulus AFD. angulo ABD. minor erit ſecans anguli ABD. id eſt dimidij arcus AB. quam AF. ſecans anguli AFD; & quia angulus AFD. a-
32.1. 13.1. 19.1. 8.5. cutus eſt, erit AFB. obtuſus, ideoque maior AB. quam AF. Igitur minor eſt ratio CA. chordæ arcus AC. ad BA. chordam arcus AB. quam CA. ſecantis anguli ACH. ſeu dimidij arcus AC. ad ſecantem anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. Igitur duorum arcuum inæqualium &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX probatis colligitur, ſi ſinus rectus cum ſecante eiuſdem arcus comparetur, quoad maiorem vel minorem proportionem; idem de eo dicendum, quod de chorda dupli arcus, ac in priori caſu maiorem eſſe rationem ſinus recti arcus maioris ad ſinum rectum minoris, quam ſecantis maioris ad ſecantem minoris: in ſecundo æqualem: in tertio minorem; Nam, vt chorda arcus maioris, ad chordam minoris; ita ſinus rectus dimidij maioris, ad ſinum rectum dimidij minoris. Cum medietas chordæ nihil aliud ſit, quam ſinus dimidij arcus: ſed in priori caſu, chorda arcus maioris, ad chordam minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris: Igitur ſinus dimidij arcus maioris ad ſinum dimidij minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris, id eſt eiuſdem arcus, ad ſecantem dimidij minoris. In ſecundo vero caſu, oſtenditur eſſe vt ſinum maioris arcus ad ſinum minoris, ita ſecantem maioris ad ſecantem minoris. In tertio minorem eſſe rationem ſinus arcus maioris, ad ſinum minoris, quam ſecantis maioris, ad ſecantem minoris.

THEO-

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVIII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterq; sit minor ſemiquadrante, aut alter æquali, vel minori differentia ſemiquadrantem excedat, quam alter à ſemiquadrante deficit; ſecans maioris ad ſecantem minoris minorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

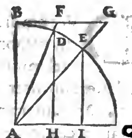
IN propoſitione 37. huius, tribus primis figuris, ſit arcus AC. maior arcu AB. ita vt vterq; ſit minor quadrante, aut AC. maior AB. minor, ita vt exceſſus AC. ſupra quadrantem ſit aut minor, aut æqualis defectui arcus AB. à quadrante. Dico ſecantem dimidij arcus AC. ad ſecãtem dimidij arcus AB. minorem habere rationem, quam arcum AC. ad arcum AB. Nam ex propoſitione 37. huius conſtat, minorem, aut æqualem eſſe rationem ſecantis dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. quam chordæ AC. ad chordam AB. ſed chorda AC. ad chordam AB. minorem habet rationem quam arcus AC. ad arcum AB. id eſt quam dimidius AC. ad dimidium AB. ergo ſecans dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. minorem habet rationem, quam medius arcus AC. ad medium arcum AB. qui arcus ſecantibus reſpondent. Igitur duorum arcuum &c. quod erat &c. Cor. 2. 26. huius. 15. 5.

COROLLARIVM.

QVod ſi vterq; arcus ſit minor ſemi quadrante, ſecans maioris ad minorem, non tantum minorem habebit rationem, quam arcus maior ad minorem, ſed etiam quam complementum arcus minoris, ad complementum maioris. Nam in quadrante ABC. ſumantur duo arcus BE. BD. vterq; minor ſemiquadrante, quorum ſecantes AG. AF. in tangentem GB. incurrant, in punctis G GF.

GF. erit DC. complementum minoris arcus DB. & EC. complementum maioris BE. Dico minorem esse rationem AG. ad AF, quam arcus DC. ad arcum. EC. Ducantur duo sinus complementi DH. EI. minor erit ratio DH. ad EI. quam arcus DC. ad arcum EC. ut autem DH. ad EI. ita AG. ad AF. (hoc enim à Clauio demonstratum est propos. 22. de secantibus, & deducitur ex 37. huius) igitur minor est proportio AG. ad AF. quam arcus DC. ad arcum EC.

Corol. 1. 26. huius.

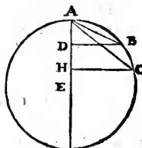


THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXIX.

SInus rectus maioris arcus, ad sinum rectum minoris, minorem habet rationem, quam chorda maioris, ad chordam minoris; & chorda ad chordam minorem rationem, quam sinus versus maioris, ad sinum versum minoris.

IN circulo ABC. sit arcus maior quilibet AC. minor AB. quorum chordæ CA. BA. sinus recti CH. BD. sinus versi HA. DA. Dico minorem esse rationem CH. ad BD. quam CA. ad BA. & minorem CA. ad BA. quam HA. ad DA. Nam in triangulis rectãgulis AHC. ADB. cum maior sit totus angulus BAD. sui parte CAH. erit reliquus angulus ABD. minor angulo ACH. Constat igitur ex 23. huius, minorem esse rationem HC. ad CA. quam DB. ad BA. & permutando, minorem rationem esse HC. ad DB. quam CA. ad BA. Rursus per eandem propositionem, cũ maior sit angulus DAB. angulo

23. huius.



angulo HAC. minor erit ratio DA. ad AB. quam HA. ad AC. & permutando, & conuertendo, maior ratio HA. ad DA. quam CA. ad BA. ideoq; minor CA. ad BA. quam HA. ad DA. Igitur sinus rectus maioris arcus &c. quod erat probandum.

COROLLARIVM.

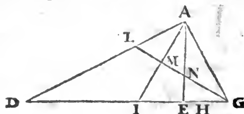
Hinc constat sinum rectum dimidij arcus maioris, ad sinum rectum dimidij minoris, minorem habere rationem, quam sinum versum arcus maioris, ad sinum versum minoris. Nam sinus rectus dimidij arcus AC. est medietas chordæ AC. & sinus rectus dimidij arcus AB. est medietas chordæ AB. vt constat ex definitione sinus recti: cum igitur vt tota chorda AC. ad totam AB. ita illius medietas, ad medietatem huius, sitq; proportio chordæ AC. ad chordam AB. minor quam sinus versi HA. ad sinum versum DA. etiam sinus rectus dimidij arcus AC. ad sinum rectum dimidij AB. minor erit ratio, quam HA. ad DA.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XL.

SI trianguli rectanguli rectum angulum perpendicularis in basim demissa secet, & ex punctis, vbi latera basi iunguntur, lateribus ipsis æquales partes ex basi abscindantur; rectæ ex trianguli angulo recto ad puncta sectionis ductæ diuidunt angulos à perpendiculari cum lateribus factos, bifariam.

SIT triangulum GAD. rectangulum ad A. & ex puncto A. demissa AE. perpendicularis in basim DG. secet angulum rectum in angulos DAE. GAE. & ex puncto G. ex basi abscindatur GI. æqualis lateri AI. & ex A. ducatur AI. Dico rectam AI. diuidere angulum DAE. bifariam Diuidatur angulus AGD. bifariam ducta GL. quæ secet. AE. in N. &

5. 1. AI. in M. Quoniam æqualia sunt latera GA. GI. in triangulo GAI. ex descriptione, æquales erunt anguli GAI. GIA.
32. 1. sed & ex descriptione, æquales sunt AGM. IGM. æquales
10. Pron. igitur sunt & reliqui. AMG. IMG. atq; ideo recti.
15. 1. Rursus cum in triangulis GEN. ANM. Anguli ad verticem N. æquales sint, & GEN. AMN. recti, æquales erunt
8. 6. & reliqui EGN. NAM. id est EAI. cum autem æquales etiam sint EGA. EAD. ablatis æqualibus EAI. EGN. remanent æquales NGA. IAD. Igitur cum angulus EAI. sit æqualis angulo EGN. & Angulus IAD. æqualis angulo NGA. sint autem ex hypothesi,



anguli EGN. NGA. æquales, erunt & anguli EAI. IAD. æquales. Atq; idem etiam ostenditur, si ipsi DA. æqualis sumatur DH. eodem .n. prorsus modo probabitur, à recta AH. angulum EAG. bifariam diuidi. Igitur si trianguli rectanguli angulum rectum &c. Quod erat demonstrandum.

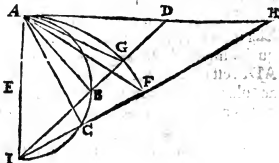
THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLI.

Differentia secantis maioris arcus cum sinu toto, ad differentiam secantis minoris, maiorem habet rationem, quam tangens maioris arcus ad tangentem minoris.

IN circulo AGF. cuius centrum. I diameter IA. sumantur duo arcus inæquales maior AF. minor AG. quorum tangentes. AH. AD. secantes IH. ID. & differentiæ secantium cum sinu toto HF. DG. Dico maiorem esse rationem AF. ad DG. quam AH. ad AD. diuisa AI. bifariam in E. centro. E. describatur circulus ABCI. secans secantes in punctis B. C. & ducantur rectæ AG. AF. AB. AC. Quoniam

niam in triangulis IAH. IAD. rectus est angulus ad A. maiorq; angulus ADI. externus, interno DAI. minor erit ratio AD. ad DI. quam AH. ad HI. & conuertendo maior ratio ID. ad DA. quam IH. ad HA. sed vt ID. ad DA. ita DA. ad DB. & vt IH. ad HA. ita HA. ad HC. (nam cum rectangulum IDB. sit æquale quadrato DA. & rectangulum IHC. Quadrato. HA. erit vt ID. ad DA. ita DA. ad DB. & vt IH. ad HA. ita HA. ad HC.) Igitur maior est ratio AD. ad DB. quam AH. ad HC. & permutando, & conuertendo, minor ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. Rursus cum in triangulo rectangulo IAD. demissa sit ad basim ID. perpendicularis AB. & lateri IA. sit sumpta in basi æqualis IG. diuidet, ex præcedenti, recta AG. angulum DAB. bifariam, atq; eodem modo in triangulo rectangulo IAD. recta AF. diuidet angulum HAC. bifariam. Quare cum in triangulis rectangulis ABD. ACH. angulus CAH. sit maior angulo BAD. maior erit ratio BA. ad AD. quam CA. ad AH. sed vt BA. ad AD. ita BG. ad GD. & vt CA. ad AH. ita CF. ad FH. (nam angulos BAD. CAH. rectæ AG. AF. bifariam diuidunt) igitur maior ratio BG. ad GD. quam CF. ad F. H. & componendo, & permutando maior ratio BD. ad CH. quam DG. ad FH. & conuertendo, minor ratio HC. ad DB. quam FH. ad DG. Cum igitur minor sit ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. vt paulo ante ostensum est, item minor ratio HC. ad DB. quam FH. ad DG. erit etiam ex æqualitate, minor ratio AH. ad AD. quam FH. ad DG. Quod erat demonstrandum.

16.1.
23. huius.
8.6.
36.3.
17.6.
31.3.
37. huius.
23. huius.
3.6.



COROL-

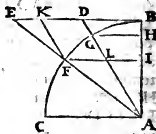
COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, etiam differentia secantis maioris arcus in semicirculo, ad differentiam secantis minoris, maiorem esse rationem, quam tangentis, arcus maioris, ad tangentem minoris; ostensum enim est maiorem esse rationem GH. ad BD. quam HA. ad DA.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

DIfferentia secantis maioris arcus, cum sinu toto, ad differentiam secantis minoris, maiorem habet rationem, quam sinus versus maioris arcus, ad sinum versum minoris.

IN superiori figura, sint rursus secantes AE. AD. illa maioris arcus BF. ista minoris BG. earum differentiæ EF. DG. & ductis sinibus rectis GH. FI. quorum iste secet AD. in L. sint eorundem arcuum sinus versi IB. HB. Dico maiorem esse rationem FE. ad GD. quã IB. ad HB. Ducatur enim KF. parallela ipsi DA. Erit angulus FKE. æqualis angulo ADE. angulus autem ADE. est obtusus (cum enim in tri-



29. 1. (margin note beside "IB. ad HB. Ducatur enim KF.")

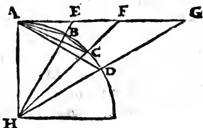
31. 1. angulo rectangulo angulus ABD. sit rectus, erit ADB. acutus,
13. 1. ac proinde eius complementum ADE. obtusus) igitur etiam
19. 1. angulus FKE. obtusus est; maius igitur est latus EF. latere
2. 6. FK. in triangulo FKE. Rursus cum parallelæ sint lateri BD. rectæ IL. HG. in triangulo ABD. erit vt HI. ad HA. ita GL. ad GA. & vt HA. ad HB. ita GA. ad GD. ergo ex æquali vt
34. 1. HI. ad HB. ita GL. ad GD. & componendo vt IB. ad BH. ita LD. id est FK. illi æqualis (est enim KDLF. parallelogrammum ex descriptione) ad GD. Sed maior ostensa est FE. quam FK.

FK. igitur maior ratio eſt FE. ad DG. quam FK. id eſt, LD. ad DG. & IB. ad HB. Quod demonſtrandum erat. 8.1.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

ARcuum continuorum in circulo ſeſe ęquali exceſſu ſuperantium, chordæ inter ſe, ſinus item recti, ſunt in continua proportione minori; ſecantes vero in continua proportione maiori.

IN circulo ABCD. cuius centrum H. & diameter HA. ſint tres arcus æqualiter differentes, ac continui AB. AC. AD. quorum chordę AB. AC. AD. & ſecantes HE. HF. HG. Dico primo minorem eſſe rationem chordæ AD. ad chordam AC. quam chordæ AC. ad chordam AB. In triangulis enim BAC. CAD. æquales ſunt anguli BAC. CAD. æqualibus arcubus BC. CD. inſiſtentes: Angulus vero CDA. maiori arcui CA. inſiſtens erit maior angulo BCA. minori arcui BA. inſiſtente. minor igitur eſt angulus DCA. angulo CEA. Ergo minor eſt ratio BA. ad AC. quam CA. ad AD. vt conſtat ex 25. huius. 27. 3. ſchol. 27. 3. per 32. 1. 25. huius.



Rurſus quoniam ſinus recti dimidij ſunt chordarum, ſint autem chordæ in continua proportione minori; erunt etiam ſinus recti in continua proportione minori. 15. 5.

Denique dico maiorem eſſe rationem ſecantis HA. ad ſecantem HE. quam ſecantis HE. ad ſecantem HF. nam cum in triangulis AHE. EHF. æquales ſint anguli AHE. EHF. maior autem ſit angulus AEH. externus, interno HFE. maior erit ratio AH. ad HE. quam HE. ad HF. Atq; eodem modo oſtendetur maiorem eſſe rationem HE. ad HF. quam HF. ad HG. Quod erat oſtendendum. coroll. 25. huius.

THEO-

THEOREMA XLI. PROPOS. LXIV.

TAngentium differentiæ quibus æquales arcus continui respondent, sunt in continua proportione maiori.

IN figura superioris propositionis, sint tres, aut plures arcus AB. BC. CD. æquales, ac continui; & tangentium differentiæ illis respondentes AE. EF. FG. Dico maiorem esse rationem AE. ad EF. quam EF. ad FG. Nam quoniam angulus AHF. diuisus est bifariam recta HE. ob arcus AB. BC. æquales,
3.6. erit vt AH. ad HF. ita AE. ad EF. Atq; eodem modo cum diuisus sit angulus EHG. bifariam recta HF. ob æquales arcus qui assumpti sunt BC. CD. erit vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Rursus quia in triangulis AHF. EHG. quorum anguli
16.1. AHF. EHG. sunt æquales, ex hypothesi, & angulus HFA.
25. huius. minor angulo HGE. maior erit ratio AH. ad HF. quam EH. ad HG. sed vt AH. ad HF. ita ostensum est AE. ad EF. & vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Igitur maior est ratio AE. ad EF. quam EF. ad FG. Quod erat demonstrandum.

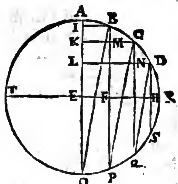
THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

SInuum versorum, ac rectorum differentiæ æqualibus arcubus continuis subtensæ, sunt in continua proportione minori.

IN circulo ABC. cuius centrum E. duæ diametri sese perpendiculariter secent in E. quæ sint AO. TR. & sumantur quotlibet arcus æquales ac continui AB. BC. CD. sintque arcuum AB. AC. AD. sinus recti BI. CK. DL. & sinus complementorum BF. CG. DH. producti in peripheriæ puncta O. P. Q. S. & qui secent sinus in M. N. & connectantur OB. PC. QD. erunt EF. FG. GH. sinuum versorum differentiæ. Dico minorem

rem esse rationem EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quoniam in triangulis rectangulis ad OIB. PMC. QND. æquales sunt etiam anguli IOB. MPC. NQD. æqualibus arcubus AB. BC. CD. insistentes æquiangula sunt triangula dicta inter se, erit ergo vt OB. ad BI. ita PC. ad CM. & QD. ad DN. & permutando, vt OB. ad PC. ita IB. ad MC. id est EF. ad FG. & vt PC. ad QD. ita MC. ad ND. id est FG. ad GH. Quoniam vero arcus BRO. CRP. DRQ. sese æquali excessu superant, æquales enim sumpti sunt arcus AB. BC. CD. tum inter se, tum arcubus OP. PQ. QS. minor erit ratio chordæ OB. ad chordam PC. quam chordæ PC. ad chordam QD. Igitur & rectæ EF. FG. GH. quæ eandem rationem cum dictis chordis obtinent, ita se habebunt, vt minor sit ratio EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quod fuit probandum.

27. 3.
31. 1.
4 6.



43. huius.

PROBLEMA IIII. PROPOS. XXXXVI.

QVadrantem ita secare, vt sinus versus maioris arcus, ad sinum versum minoris, maiorem habeat rationem, quam tangens maioris, ad tangentem minoris.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum L. latera perpendicularia LA. LD. quorum vnum LA. ita secetur, vt pars LE. sit aut æqualis, aut maior quam EA. & ducatur EC. perpendicularis ad LA. & arcus CA. quem EC. abscindit ex quadrante, diuidatur bifariam in B. ducaturque arcus BA. sinus rectus BR. & connectatur chorda AC. secans BR. in I. Item semidiameter L. B. secans CE. in K. & CA. in S. denique per I. ipsi AL. agatur parallela IM. secans CE. in H. & LB. in M.

H &

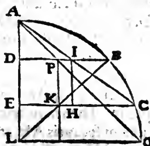
& DL. in N. Constat EA. esse sinum versum arcus CA. &
RA. sinum versum arcus BA. Item CE. esse tangentem anguli CLE. idest arcus CA. & KE. tangentem anguli KLE. seu arcus BA. Posito nimirum sinu toto LE. Dico maiorem esse rationem EA. ad AR. quam CE. ad EK. Nam æqualium arcuum CB. BA. æquales sunt sinus versi BS. AR. Igitur triangula BSI. ARI. rectangula ad pun-
15. 1. cta S. & R. & habentia angulos ad
32. 1. verticem. I. æquales æquiangula
sunt, & quia præterea latera AR.
26.1. BS. æqualia sunt, æqualia etiam
34 1. erunt SI. IR. at ipsi IR. æqualis est
NL. Igitur, cũ rursus in duobus triãgulis rectangulis ad S. N. etiam anguli ad verticem M. sint æquales, & æqualia latera NL. SI. eodem modo, quo paulo ante ostendemus in dictis triangulis latus SM. lateri MN. & basim IM.
19. 1. basi ML. esse æqualem, maior autem ML. quam MN. Igitur maior est IM. quam MN. ac proinde NM. minor quam dimidia ipsius NI. at LE. aut dimidia est, aut maior quam dimi-
15.3. dia ipsius LA. quæ multo maior est quam NI. Igitur maior
34. 1. est LE. id est HN. quam MN. cadet igitur punctum M. inter puncta H. N. ac LM. producta secabit CE. in K. inter puncta C. H.; maior igitur est EK. quam EH. Rursum cum in triangulo CEA. recta IH. sit parallela lateri AE. & IR. ipsi HE. ex
2. & 4. 6. descriptione erit vt CE. ad EH. id est CA. ad IA. ita EA. sinus versus arcus CA. ad RA. sinum versum arcus BA. sed CE.
8.5. tangens anguli CLE. ad KE. tangentem anguli KLE. mino-
13.5. rem habet rationem quam CE. ad EH. Igitur CE. tangens anguli CLE. seu arcus CA. ad KE. tangentem anguli KLE. seu arcus BA. minorem habet rationem, quam EA. sinus versus arcus CA. ad RA. sinum versum arcus BA. Quod erat, &c.

PRO-

PROBLEMA V. PROPOS. XXXXVII.

DAto arcu in Quadrante, alium inuenire, ita vt tangens maioris ad tangentem minoris, maiorem habeat rationem, quam ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris.

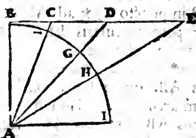
SINVM DB. arcus AB. vtcunque acceptum ſecet chorda quadrantis AO. in P. ex quo puncto P. ipſi AL. parallela PK. ducta ſecet ſemidiametrum LB. in puncto K; & ad AL. ducatur perpendicularis EKC. Dico maiorem eſſe rationem tangentis arcus AC. ad tangentem arcus AB. quam ſinus verſi eiuſdem arcus AC. ad ſinum verſum arcus AB. Ducatur AC. ſecans DB. in I. & ex I. ipſi PK. ſeu AE. parallela agatur IH. ſecans EC. in H. quod quidem punctum I. cadet inter P. & B. cum punctum C. cadat ſupra O. ideoque recta AC. ſupra AO, & punctum H. cadet inter puncta K. & C. erit EA. ſinus verſus arcus AC. & DA. ſinus verſus arcus AB. & CE. tangens anguli ELC. id eſt arcus AC. & EK. tangens anguli ELK. id eſt, arcus AB. Cum igitur parallelæ ſint IH. AE. Item etiam DI. & EH. erit vt CE. ad EH. id eſt CA. ad AI. ita EA. ad AD. ſed CE. ad EH. minorem habet rationem quam CE. ad EK. Igitur EA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. minorem habet rationem, quam CE. tangens anguli ELC. ſeu arcus AC. ad EK. tangentem anguli ELK. ſeu arcus AB. Quod fuit probandum. 2. & 4. 6. 8. 5.



PROBLEMA VI. PROPOS. XXXXVIII.

QVadrantem ita secare, vt secans arcus maioris, ad secantem minoris, maiorem habeat rationem, quam arcus maior, ad arcum minorem.

QVADRANS ABI. diuidatur bifariam in G. & arcus G.B. rursus bifariam in F, & ducatur tangens infinita BE. ac per puncta GF. secantes AC. AD. fiatq; vt BC. ad BD. ita secans AD. ad aliam quampiam, quæ transferatur ex A. in E. ita vt AE. secans arcus BH. quartæ proportionali sit æqualis. Dico maiorem esse rationem secantis AE. ad se-



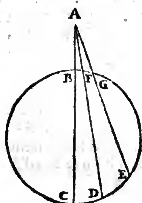
cantem AD, quam arcus HB. ad arcum BG. maiorem autem
14.5. 26. huius. esse AE. quam AD. & ideo arcum HB. quam GB. constat quia BD. maior est quam BC. quare cum maior sit ratio tangentis DB. ad tangentem BC. quam arcus GB. ad arcum BF. maior etiam erit ratio secantis AE. ad secantem AD, quam arcus
13.5. 15.5. GB. ad arcum BF. sed vt arcus GB. ad BF. arcum, ita arcus IB. ad arcum GB. vtrobique enim maior minoris duplus est,
8.5. & IB. ad BG. maiorem habet rationem quam HB. ad BG. ergo secans AE. ad secantem AD. maiorem habet rationem quam arcus HB. ad arcum BG. Igitur Quadrantem ità secauimus, vt secans arcus maioris, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLIX.

SI ex puncto diametri productæ extra circulum rectæ ducantur, quæ in conuexam, & cauam peri-

periphériam incidentes semicirculum secent, tam secantis maioris ad minorem, quam incidentium in conuexam peripheriam maioris ad minorem, minor est ratio, quam maioris arcus ex ijs quos abscindunt, ac subtendunt ad minorem.

SIT circulus CDE. in cuius diametro extra circulum producta, sumatur punctum A. aquo in semicirculum CB. ducantur quotlibet rectæ AD. AE. quæ cõuexam peripheriam secent in pũctis F. G. concauam in D. E. Dico minorem esse rationem AD. ad AE. item AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Nam quoniam rectangulum DAF. æquale est rectangulo EAG. erit vt DA. ad EA. ita AG. ad AF. Rursus quoniam chordæ minori EG. additur recta GA. & maiori DF. additur recta FA. minor quam GA. minor erit proportio DA. ad EA. quàm chordæ DF. ad chordam EG. sed chorda DF. ad chordam EG. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem, quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. sed vt DA. ad EA. ita ostensum est esse AG. ad AF. Igitur minor est ratio AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur si ex puncto, &c. Quod erat ostendendum.



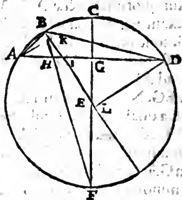
36. 3.
14. 6.
1. huius.
Corol. 2. 28. huius.
13. 5.

THEOREMA XXXXIV. PROPOS. L.

SI à centro, atque ab extremitate diametri circuli, duæ rectæ ducantur ad idem circumferentiæ

tiæ punctum, quæ chordam, & arcum, cui subtenditur, in partes inæquales diuidant: arcus maior, ad minorem maiorem habet rationem, quam segmentum chordæ maius, ad minus.

SIT circulus ABC. cuius centrum E. diameter FC. ab E. & F. ducantur duæ rectæ FB. EB. ad idem circumferentiæ punctum B. quæ chordam quampiam AD. secent in partes inæquales recta quidem FB. in H. & EB. in I. Item arcum DA. in maiorem DB. minorem BA. Dico minorem esse rationem DH. ad HA. itemque minorem rationem DI. ad IA. quam arcus DB. ad arcum BA. Ex A. & D. ducantur perpendiculares ad EB. rectæ DL. AK. erunt hæ rectæ sinus arcuum BD. BA. Item ex E. ad AD. perpendicularis EG. secans tã chordam AD. quam arcum



schol. 27.3. & 3. 3. ACD. & AFD. bifariam in G. C. & F. manifestum est, cum arcus DB. maior sit quam arcus BA. ideoque maior dimidio totius DA. quod punctun B. cadet inter A. & C. ideoque puncta I. & H. inter puncta G. & A. Quare segmentum DI. ma-

32. 1. ius est segmento IA. & DH. maius quam HA. Quoniam æqui-

15. 1. angula sunt triangula rectangula DLI. AKI. ob æquales an-

4. 6. gulos ad verticem I. erit vt DI. ad IA. ita DL. sinus rectus ar-

coroll. 1. 28. huius. cus BD. ad AK. sinum rectum arcus AB. sed DL. ad AK. minorem habet rationem quam arcus DB. ad arcum BA. Igitur segmentum DI. ad segmentum IA. minorem habet rationem

27. 3. quam arcus DB. ad arcum BA. Rursus cum duo anguli ABH.

2. 6. DBF. insistant arcubus æqualibus AF. DF. ideoque sint æqua-

coroll. 2. 28. huius. les, erit vt DH. ad HA. ita chorda DB. ad chordam BA. at chorda DB. ad chordam BA. minorem habet rationem, quam

arcus

arcus DB. ad arcum BA. Igitur DH. ad HE. minorem habet rationem, quam arcus DB. ad arcum BA. Quod erat, &c.

COROLLARIVM I.

Hinc patet si angulus quem duæ subtensæ efficiunt, recta ab externitate diametri ducta diuidatur, bifariam etiam diuidi; nam probatum est angulum ABD. bifariam secari, à recta FB.

COROLLARIVM II.

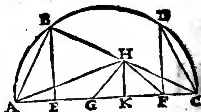
Constat etiam, si in chordam recta ex centro ducatur, quæ chordam, & arcum subtensum diuidat; habere segmenta chordæ proportionem eandem, quam sinus arcuum; Nam demonstratum est, esse, vt DI. ad IA; ita DL. sinum arcus DB. ad AK. sinum arcus AB.

THEOREMA XLV. PROPOS. LI.

SI à puncto in quo diameter circulum secat, ex ipsa diametro dematur duplum sinus recti arcus Quadrante minoris, & ex termino lineæ abscissæ alius sinus rectus ducatur: arcuum inter sinus, & extremam diametrum interceptorum maior est ratio, quam dupli sinus ad sinum; minor autem quam dupli sinus recti, ad sinum versum arcus minoris.

IN semicirculo ABC. sumatur arcus AB. à puncto A. in quo diameter AC. circulum secat, Quadrante minor, & ducto sinu recto BE. ipsius BE. à puncto A. sumatur dupla AF. & ex puncto F. ducatur FD. sinus rectus arcus DA. Dico maiorem esse rationem arcus DA. ad arcum BA. quam rectæ FA. ad

sinum



sinum BE. minorem autem quam FA. sinum versum arcus DA. ad AE. sinum versum arcus AB. connectantur AB. CD. BC. & in chorda BC. sumatur BH. æqualis ipsi BA. & AE. æqualis EG. & ex H. ducatur ad diame-
31. 3. trum AC. perpendicularis HK. & connectantur HA. HG. HF. BD. Quoniam angulus ABH. in semicirculo rectus est, & rectus etiam HKA. ex hy-
coroll.22.3. pothesi, erunt puncta A. B. H. K. in circulo. Igitur anguli
21. 3. BHA. BKA. in eodem segmento existentes æquales sunt, sed BHA. est semirectus (nam sumpta sunt duo latera BA. BH.
5. 1. æqualia igitur equales anguli BAH. BHA. & semirecti cum
32. 1. ABC. in semicirculo sit rectus.) Igitur BKA. est semirectus, ac
6. 1. proinde cum rectus sit angulus KEB. semirectns est KBE. æqualia igitur sunt latera EK. EB. cum igitur AF. sit dupla ipsius BE. ex hypothesi, id est, ipsius EK. erit reliquum AE. KF. æquale ipsi EK. Si igitur æqualia demantur AE. EG. remanebunt GK. KF. æquales. Cum igitur duo triangula HKG. HKF. habeant duo latera HKG. HKF. circa angulos rectos
4. 1. æqualia, habebunt & angulos HGK. HFK. æquales, ideo-
17. 3. que complementa HGA. HFC. æqualia. Item quia CAE. re-
3. & 4. 6. ctangulum æquale est Quadrato AB. (est enim vt CA. ad BA. ita BA. ad AE. ideoque proportionales sunt CA. BA. AE.),
1. 6. & AG. est dupla ipsius AE. ex hypothesi erit rectangulum
47. 1. CAG. duplum Quadrati AB. sed AH. est duplum Quadrati AB. cum sit æquale Quadratis rectarum AB. BH. quæ ponun-
6. 6. tur æquales; igitur rectangulum CAG. æquale est Quadrato
17. 6. AH. Quare vt CA. ad AH. ita AH. ad AG. æquiangula igitur sunt triangula CAH. HAG. Igitur angulus AHG. angulo HCA. est æqualis. Cum vero ostensi sint æquales anguli
32. 1. HFC. HGA. erunt reliqui anguli HAG. CHF. æquales, æqui-
26. 1. angulum igitur est triangulum HFC. triangulo HAG. sed trian-

triangulo HAG. ostensum est triangulum CAH. esse æquiangulum, æquiangula igitur sunt triangula ACH. HCF. 4. 6.
Igitur vt AC. ad CH. ita CH. ad CF. æquale igitur actu 17. 6.
Quadratum HC. rectangulo ACF. sed etiam rectangulum 8.& 17.6.
ACF. æquale est Quadrato CD. æqualia igitur sunt Quadrata HC. DC. æquales igitur sunt rectæ HC. DC. Quare cum recta BH. sit sumpta æqualis ipsi BA. & HC. ostensa sit æqualis ipsi CD. erit tota BC. æqualis duabus simul DC.
BA. sed CD. DB. maiores sunt quam CB. Igitur sunt etiam 20. 1.
maiores quam CD. B .demptæ igitur communi CD. remanebit DB. maior quam BA. Igitur arcus DA. maior est quam vt sit duplex arcus BA. dupla antem est FA. ipsius EB. maior igitur ratio est arcus DA. ad arcum AB. quam rectæ FA. ad rectam EB. Rursus quoniam arcus BA. est Quadrante minor maior erit ratio FA. sinus versi arcus DA. ad AF. sinum versum arcus BA. quam DA. ad BA.

FINIS LIBRI I.

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER SECVNDVS.



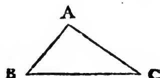
THEOREMA I. PROPOS. I.

IN omni triangulo angulorum inæqualium, maior eſt ratio anguli maioris ad minorem, quam lateris oppoſiti maiori angulo, ad latus oppoſitum minori.

IN triangulo ABC. ſit angulus B. maior angulo C. Dico angulum B. ad angulum C. maiorem habere rationem, quam latus AC. ad latus AB. Nam ea eſt proportio lateris AC. ad latus AB. quæ eſt ſinus recti anguli B. ad ſinum rectum anguli C. At ſinus rectus anguli B. ad ſinum rectum anguli C. minorem habet rationem, quam angulus B. ad angulum C. Igitur latus AC. ad latus AB. minorem habet rationem quam angulus B. ad angulum C. ideoque maior eſt ratio anguli B. ad angulum C. quam AC. ad AB. Quod oſtendere oportebat.

Clauius p. 1. de triangulis rectil.

coroll. 1. 28. 1. huius.

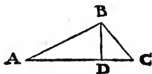


THEO-

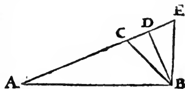
THEOREMA II. PROPOS. II.

SI ex trianguli angulo, in basim perpendicularis demittatur, ex angulis quos cum lateribus facit, maior ad minorem, minorem habet rationem, quam, aut maius segmentum basis ad minus, aut composita ex basi, & assumpta inter perpendicularem, & basim, ad ipsam assumptam.

SIT triangulum quodcumque ABC. ex cuius angulo B. in basim AC. perpendicularis demittatur AD. quæ cadat primo intra triangulum, faciatque cum lateribus angulus ABD. CBD. sitq; ABD. maior, DBC. minor. Dico maiorem esse rationem AD. ad DC. quam anguli ABD. ad angulum DBC. Vt enim AD. ad DC. ita tangens anguli ABD. ad tangentem anguli DBC. at tangens anguli maioris ABD. ad tangentem minoris DBC. maiorem habet rationem, quam angulus maior ad minorem; Igitur AD. ad DC. maiorem habet rationem, quam angulus ABD. ad angulum DBC. 26.1.huius.



Sit secundo triangulum ABC. obtusangulum ad C. & statuatur AC. basis, in quam productam cadat perpendicularis BD. Dico maiorem esse rationem AD. ad DC. quam anguli DBA. ad angulum CBD. Sumatur enim ipsi DC. æqualis DE. & connectatur DE. Quoniam duo triangula circa angulos rectos ad D. habent latera BD. DC. æqualia lateribus BD. DE. æquiangula erunt, & angulus EBD. erit æqualis angulo DBC. Cum igitur AD. sit

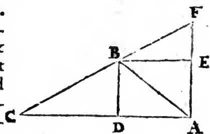


tangens anguli DBA. & DE. tangens anguli DBE. maior erit proportio AD.ad DE.ideſt DC. quam anguli ABD. ad angulum EBD. ideſt CBD. Quod ſecundo oſtendendum erat.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ex trianguli angulo, in baſim perpendicularis demitatur, reliquorum angulorum maior ad minorem minorem habet rationem, quam maius ſegmentum ad minus.

SIT triangulum ABC.in quo ab angulo ABC. perpendicularis demittatur BD.quæ cadat intra triangulum, in baſim AC.ſitque angulus BAC. maior angulo BCA. Dico minorem eſſe rationem anguli BAC. ad angulum BCA. quam CD.maioris ſegmenti ad DA.minus. Ducatur AF. parallela ipſi BD. quæ occurrat protractæ CB.in F. & ipſi AC.ſit parallela BE.erit AE. tangens anguli EBA.id
4. & 34. 1. eſt anguli BAC. & EF. tan-
29. 1. gens anguli FBE. id eſt anguli BCA. (poſito nimirum eodem ſinu toto BE.) Et AE.



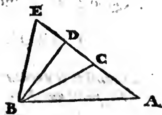
29.1. quidem maior erit quam EF. cum angulus BAC. id eſt, EBA. ponatur maior, quam angulus BCA.i d eſt, EBF.
26.1.huius. igitur maior eſt ratio AE. ad EF. id eſt, CB. ad BF. id eſt,
2. 6. CD. ad DA. quam anguli BAC. ad angulum BCA. Quod probandum erat.

THEO-

THEOREMA IIII. PROPOS. IIII.

SI in trianguli obtuſanguli latus ex angulo acuto demiſſa perpendicularis cadat extra triangulum, ſitque anguli obtuſi complementum maius reliquo angulo: maior erit ratio lateris, in quod cadit perpendicularis, cum aſſumpta inter latus & perpendicularem, ad aſſumptam; quam anguli complementi, ad reliquum angulum.

SIT triangulum ABC. obtuſangulum ad C. & in protractum latus AE. cadat perpendicularis BD. & ſumatur DE. æqualis DC. ac connectatur BE. Dico maiorem eſſe rationem AD. ad DC. quam anguli BCD. qui complementum eſt obtuſi ad angulum reliquum BAC.



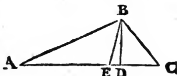
Rurſus enim BED. BCD. anguli ſunt æquales, ob latera BD. DE. æqualia lateribus BD. DC. circa angulum rectum. Igitur, ex præcedenti, maior erit ratio AD. ad DE. id eſt, DC. quàm anguli BEA. id eſt, BCD. ad reliquum angulum BAC. 4. 1. 3. 2. huius.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI trianguli angulum inæqualibus lateribus contentum, bifariam diuidens recta in baſim intra triangulum cadat; ſegmentum maius ad minus, minorem habet rationem, quam reliquorum angulorum maior ad minorem.

SIT

EX trianguli ABC. angulo ABC. duobus inæqualibus lateribus AB. maiori BC. minori contento, in basim AC. cadat recta BE. quæ angulum ABC. bifariam secet, & basim
3. 6. AC. in E. Cum sit vt AB. latus maius ad BC. minus, ita AE. ad EC. erit AE. maius segmentum, EC. minus, &
18. 1. angulus C. maior, A. minor. Dico minorem esse rationem



3. 6. 1. 2. huius. AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. Vt enim AE. ad EC. ita AB. ad BC. Sed AB. ad BC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Igitur AE. ad EC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc constat si ducatur ad basim AC. perpendicularis AD. punctum E. cadere in maius segmentum AD.
3. 2. huius. *nam si caderet in punctum D. aut inter D. & C. maior esset proportio AE. ad EC. quàm anguli C. ad angulum A. quod est contra paulo ante demonstrata.*

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam basim AC. in puncto inter E. D. diuidi posse, ita vt eadem sit ratio anguli C. ad angulum A. quæ segmenti maioris ad minus. Non enim in D. aut puncto intra D. & C. nam ibi semper minor est ratio anguli maioris ad angulum minorem, quam segmenti maioris, ad minus, neque in E. aut puncto inter A. & E. nam illic maior est ratio anguli maioris, ad minorem, quam segmenti maioris, ad minus.

COROL-

COROLLARIVM III.

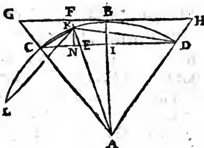
HInc etiam efficitur si in triangulo, recta ex angulo in basim protractam extra triangulum ducta, efficiat cum viciniori latere angulum, dicto angulo æqualem; maiorem esse rationem maioris anguli adiacentis, ad minorem quam basis, ad interceptam inter basim, & rectam ex angulo ductam. Si enim sit triangulum AEB. in cuius basim AE. protractam, ducatur BC. faciens angulum EBC. angulo EBA. æqualem. minor erit ratio AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. sed anguli C. ad angulum A. minor est ratio quam anguli AEB. ad eundem angulum A. minor enim est C. internus externo AEB. Igitur minor est ratio AE. ad EC. quam anguli AEB. ad angulum A. 8. 5. 16. 1.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

14. 6.

SI ex trianguli Isoscelis angulo, recta in basim demissa, eam in partes inæquales diuidat; minor erit ratio maioris segmenti ad minus, quam anguli maiori segmento oppositi, ad oppositum minori.

EX trianguli AGH. æqualium angulorum ad G. & H. angulo A. ducatur in basim GH. recta AF. secans eam in partes inæquales HF. maiorem FG. minorem. Dico minorem esse rationem HF. ad FG. quam anguli HAF. ad angulum FAG. Ducatur ex puncto A. in GH. perpendicularis AB. & distantia AB. centro A. describatur, circulus secans AH. AF. AC. in punctis DKC. & connectatur DC. KD. & ipsi



KD.

KD. chorde, sumatur æqualis KL. diuidaturque angulus LKD. bifariam recta AKF. & angulus CKD. bifariam recta
Schol. 27. 3. FN. cum angulus DKC. maior sit angulo DKL. erit, & eius medietas DKN. maior medietate DKE. linea igitur KN. cadet inter E. & C. in N. erit igitur CN. minor quam CE. Quare maior erit proportio DN. ad NC. quam DE. ad EC.
3. 6. Sed vt DN. ad NC. ita DK. ad KC. maior igitur ratio est
Corol. 2. 28. DK. ad KC. quam DE. ad EK. est autem etiam maior ratio
1. huius. arcus DK. ad arcum KC. quam chordę DK. ad chordam KC. Igitur multo maior ratio erit arcus DK. ad arcum KC.
Schol. 27. 3. quam DE. ad EC. id est quam HF. ad FG. (Nam recta AB.
3. 3. arcum CD. bifariam secans secat CD. bifariam, quare & ad angulos rectos in I. sed & recti sunt positi anguli ad B.
Schol. 4. 6. parallelæ igitur sunt CD. GH. igitur vt DE. ad EC. ita HF. ad FG.) Quare si ex trianguli Isoscelis angulo, &c.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI ex angulo trianguli inæqualibus lateribus contento in oppositam basim demissa perpendicularis intra triangulum cadat, & alia in maius segmentum ex eodem angulo ducatur: recta inter ductam, & angulum minorem contenta, ad reliquam partem basis, maiorem habet rationem, quam angulus oppositus, ad reliquum angulum.

SIT triangulum AHG. cuius latus AH. minus AG. maius, basis HG. in quam ca-
Schol. 47. 1. dat perpendicularis AB. quæ basim diuidet in duo segmenta maius BG. minus BH. & in maius ex A. ducatur recta AF. Dico maiorem esse ratio-



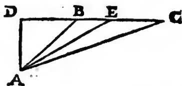
nem

nem GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quoniam minor est HB. tangens anguli HAB. quam BG. tangens anguli BAG. minor erit ratio HB. ad BG. quam anguli HAB. ad angulum BAG. & componendo, minor ratio HG. ad GB. quam HAG. ad BAG. sed BG. ad GF. minor est ratio quam BAG. ad FAG. (cum enim maior sit ratio tangentis maioris GB. ad minorem BF. quam anguli BAG. ad angulum BAF. erit per conuersionem rationis minor ratio BG. ad GF. quam BAG. ad FAG.) Igitur ex æquali minor est ratio HF. ad FG. quam HAF. ad FAG. & conuertendo maior ratio GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quod erat &c. 26. 1. huius. 26. 1. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

IN omni triangulo amblygonio, si ex angulo acuto in latus protractum, perpendicularis ducatur, & ex eodem angulo oppositum latus recta secetur; segmentum vicinius perpendiculari, ad remotius, minorem habet rationem, quam angulus oppositus, ad oppositum.

SIT triangulum ABC. amblygonium ad B. in cuius latus protractum CB. ex angulo acuto A. perpendicularis ducatur AD. & ducatur AE. secans BC. vtcumque. Dico minorem esse rationem segmenti BE. vicinioris ipsi AD. ad EC. remotius quam anguli BAE. ad angulum EAC.



sunt enim BE. EC. differentiæ tangentium CD. ED. BD. estque EC. remotior à puncto contactus D. quam BE. Igitur minor est ratio BE. ad EC. quam anguli BAE. ad angulum EAC. Quod erat probandum. 27. 1. huius.

COROLLARIVM.

Eodem modo oſtenditur ſi ex trianguli rectanguli angulo acuto, recta in oppoſitum latus ducatur; minorem eſſe rationem ſegmenti vicinioris perpendiculari, ad remotius quam anguli oppoſiti viciniori ſegmento, ad oppoſitum remotiori. In triangulo enim rectangulo ADE. Ducta vtcumque AB. minor eſt ratio DB. ad BE. quam anguli DAB. ad angulum BAE.

SCHOLIVM.

Apposuimus in propoſitione ſeptima huius hanc conditionem, vt ducta AF. cadat in maius ſegmentum BG. quia ſi caderet in minus HB. poſſet contingere vt proportio HF. ad FG. modo eſſet minor, modo maior, quam anguli oppoſiti ad oppoſitum. Ducatur enim in minus ſegmentum HB. recta AF. ſecans arcum KB. bifariam in L. & recta HF. accipiatur æqualis FI. IM. MG. & arcus BN. NO. ſint æquales ipſis KL. LB. Erit HF. maior quam FB. maior enim eſt ratio HF. ad FB. quam KL. ad LB. æqualis autem eſt KL. ipſi LB. igitur maior eſt HF. quam FB. & CP. quam CB. Cum igitur tangentium differentiæ reſpondentes arcubus KL. LB. BN. NO. componentes rectam HC. duæ ſint æquales ipſi HF. videlicet HF. PC. duæ minores FB. BP. componentes vero HG. ſint omnes æquales ipſi HF. erit tota HG. maior toti HC. Igitur punctum O. cadet inter S. & K. & punctum C. inter G. & H. ducatur AG. ſecans circulum in S. Cum ſit vt OK. ad KL. ita GH. ad HF. vtrobique enim ratio eſt quadrupla, erit maior ratio SK. ad KL. quam GH. ad HF. Ita inter puncta H. F. accipiatur punctum T. ad quod ex centro ducatur AT. ſecans circulum

culum in R. Quoniam GH. ad HF. minorem habet rationem quam SK. ad KL. & HF. ad HT. minorem quam LK. ad KR. erit ex æquali minor ratio GH. ad HT. quam SK. ad KR. Rursus cum sit minor ratio SB. ad BK. quam GB. ad BH. & componendo minor ratio SK. ad KB. quam GH. ad HB. erit eadem ad minorem, sit vt GH. ad HB. ita SK. ad KQ. & ducatur AQV. Quoniam maior est ratio GH. ad HV. quam GH. ad HB. vt autem GH. ad HB. ita SK. ad KQ. maior erit ratio GH. ad HV. quam SK. ad KQ.

8.huius. 26.1.huius. 8.5. 8.5.

Ostendimus igitur maiorem posse esse rationem SK. ad KL. quam GH. ad HF. minorem autem SK. ad KQ. quam GH. ad HV. ideo conuertendo, & diuidendo, maiorem esse rationem HF. ad FG. quam KL. ad LG. minorem autem HV. ad VG. quam KQ. ad QS. quod ostendere volebamus.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum dictis lateribus contentum angulo inæqualem: maior angulus compræhensus, ad vtrumlibet reliquorum maiorem habet rationem, quam minor comprehensus, ad reliquos, si maiores vnique trianguli cum maioribus, & minores cum minoribus comparentur.

Sint duo triangula LAF. LAE. quæ duo latera LA. AF. duobus lateribus. LA. AE. æqualia habeant, sit vero. LA. maius tam latere. AF. quam AE. & angulus LAF. æquali-

bus lateribus comprænhensus, maior angulo LAE. æqualibus item comprehenso. Dico maiorem esse rationem anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. Item maiorem esse rationem anguli FAL. ad AFL. quàm EAL. ad AEL. Componantur duo latera maiora in vnam lineam rectam AL. & per reliqua duo AE. AF. æqualia, centro A. describatur circulus CEF. secans AL. in C. ductaq; recta LI. tangat circulum in I. ac primo cadant puncta EF. inter C. & I. Item centro L. distantia LE. describatur circulus HEG. secans AL. in H. & LF. in G. & per puncta FE. ducatur FB. secans AL. in B.) Secabit autem, cum angulus. LAF. recto minor sit, nam cum rectus sit LIA. erit LAI. ac multo magis eius pars LAF.

32.1. acutus, & in triangulo Isoscele AFE. angulus ad basim AFE. acutus; quare angulis AFB. FAB. existentibus minoribus duobus

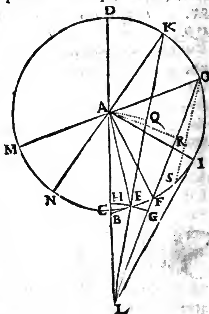
13. Pron. rectis, concurrent AB. FB.

8. 5. ad partes B.) maior erit ratio sectoris AFE. ad triangulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum

8. 5. AEB. sed sector AFE. ad sectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem, quàm ad triangulum AEB. igitur sector

33. 6. AFE. ad sectorem AEC. id est arcus FE. ad arcum EC. maiorem habet rationem, quàm triangulum AFE. ad trian-

1. 6. gulum AEB. id est, quam FE. ad EB. & conuertendo, minor est ratio arcus CE. ad arcum CF. quàm BE. ad EF. Eodem prorsus modo ostendemus, maiorem esse rationem sectoris HLE. ad sectorem ELG. id est arcus HE. ad arcum



EG.

EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id eſt, quàm BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quàm arcus HE. ad arcum EG. cùm ergo minor ſit proportio CE. ad EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quàm arcus HE. ad arcum EG. erit ex æquali, minor ratio arcus CE. ad EF. id eſt, anguli LAE. ad EAF. quàm arcus HE. ad EG. id eſt anguli ALE. ad angulum ELE. & permutando, conuertendo, ac componendo, maior erit ratio FAL. ad FLA. quàm EAL. ad ELA. 33. 6.

Quod vero maior ſit ratio FAL. ad AFL. quam EAL. ad AEL. Ita oſtenditur. Quoniam maior eſt angulus LEA. angulo LFA. & minor angulus EAL. angulo FAL. maior erit ratio LEA. ad EAL. quàm LFA. ad FAL. ergo maior ratio FAL. ad LFA. quam EAL. ad LEA. Cor. 26. 5.

Idem oſtenditur ſi alterum horum punctorum cadat in punctum contactus I.

Cadant ſecundo puncta. E. F. ſupra punctũ contactus I. in puncta K. O. habeantq; duo triangula KAL. OAL. duo latera KAL. OAL. æqualia, & ſit angulus KAL. maior angulo OAL. ſecentq; baſes LK. LO. circulũ in punctis E. F. inter puncta C. I. Conſtat angulũ KAL. eſſe maiorẽ angulo OAL. & angulum OLA. maiorem angulo KLA. totũ parte: ſed & angulus LOA. maior eſt angulo LKA. (cum enim angulus KAE. maior ſit angulo OAF. erunt reliqui duo. AKE. AEK. reliquis duobus AOF. AFO. minores, ideoque dimidium AKE. dimidio AOF. minus.) Igitur rurſus maior erit ratio anguli KAL. ad angulum ALK. quàm OAL. ad ALO. item maior ratio KAL. ad AKL. quàm OAL. ad AOL. 32. 1.

Idem probabimus, ſi altera dictarum linearum tranſeat per punctum I. Cum manifeſtum ſit angulum LAI. eſſe partem cuiuslibet angulorum ſuperiorum ad A. & angulum LIA. rectum eſſe maiorem acutis AKL. AOL. deniq; ALI. eſſe maiorem ſingulis ALE. ALF.

Deni-

Denique secet altera basium dictorum triangulorum, circulum in puncto O. supra punctum contactus I. altera infra, sit in puncto E. habeantq; rursus triangula OAL. EAL. duo latera OA. AL. duobus lateribus EA. AL. æqualia, & sit angulus OAL. maior angulo EAL. Quoniam ex prima parte huius maior est ratio anguli OAL. ad ALO. quam IAL. ad ALI. & IAL. ad ALI. maior, quàm FAL. ad ELA. ex prima parte huius propositionis, maior erit ratio OAL. ad ALO. quam EAL. ad ELA. item quia maior ratio OAL. ad AOL. quam IAL. ad AIL. & IAL. ad AIL. maior, quàm EAL. ad AEL. erit OAL. ad AOL. maior ratio, quã EAL. ad AEL. Quare si duo triangula &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprehensum angulo inæqualem. In triangulo in quo angulus compræhensus minor est, reliquorum angulorum maior ad minorem, maiorem habet rationem, quam in altero.

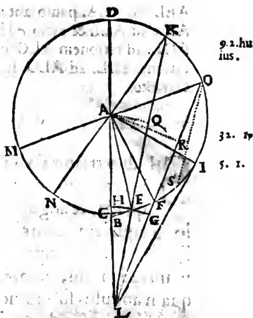
Sint duo triangula LAO. LAK. eodem modo disposita, quo superiori propositione, & sit angulus LAK. compræhensus maior angulo compræhenso OAL. Dico in triangulo. LAO. angulum AOL. maiorem, ad angulum OLA. minorem, maiorem habere rationem, quam in triangulo LAK. angulum maiorem AKL. ad angulum minorẽ ALK. Cadat primo vterq; angulus. O. K. supra punctum contactus I. & secent rectæ LK. LO. conuexam peripheriam in punctis E. F. & ducantur ex centro A. rectæ AE. AF. Quoniam

niam maior est ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. (ex prima parte præcedentis propositionis) erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. sed angulis FAL. FLA. simul est æqualis angulus externus. AFO. id est AOF. & angulis EAL. ELA. simul æqualis est angulus externus AEK. id est AKE. Igitur maior est ratio anguli AOF. seu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id est, AKL. ad angulum ALK.

9.2. huius.

32. 1.

5. 1.



Idem eodem ferme modo demonstrabitur si alterutrum punctorum vt F. cadat in punctum contactus. I. Cum enim superiori propositione probata sit maior ratio IAL. ad ILA. quam EAL. ad ELA. erit componendo maior ratio duorum IAL. ILA. simul, id est anguli AIL. (qui rectus est, ideoq; æqualis duobus reliquis IAL. ILA.) ad ILA. quàm duorum EAL. ELA. simul, id est externi AEK. ac proinde æqualis AKL. ad KLA. 9.2. huius.

Cadat secundo vtrumque punctum E. F. sub punctum contactus I. cum angulus LEA. sit maior angulo LFA. & angulus ELA. minor angulo FLA. maior erit ratio anguli LEA. ad angulum ELA. quàm anguli LFA. ad angulum FLA. Neque aliter procedet demonstratio, si punctum F. cadat in punctum contactus I. 21. 1.

Denique cadat alteruter angulorum supra punctum contactus, & alter E. infra, ille minor, hic maior: cum ratio

AEL.

AEL. ad ELA. paulo ante ostensa sit maior quam ratio AIL. ad ALI. & ratio AIL. ad ALI. maior, quam ratio AOL. ad rationem ALO. erit ratio AEL. ad ELA. maior ratione AOL. ad ALO. Igitur si duo triangula.&c. Quod erat. &c.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI duo triangula duo latera æqualia habueriut, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inęqualia, & angulum ijs compræhensum angulo inæqualem: complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum, ad duos rectos, maius ad minus, maiorem quidem rationem habet, quam angulus sub minori basi, & maiori latere in vno triangulo, ad angulum sub maiori basi & maiori latere in altero triangulo, minorem vero, quam angulus sub minori basi, & minori latere in vno triangulo, ad angulum sub maiori basi, & minori latere in altero triangulo.

Ijsdem positis, quæ superioribus propositionibus secet
13. 1. diameter BD. circulum in D. erunt KAD. OAD. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum KAL. OAL. ad duos rectos, & angulus OLA. contentus minori basium OL. & maiori laterum LA. Angulus KLA. contentus maiori basium LK. & maiori laterum LA. Angulus autem LOA. contentus minori basium LO. & minori laterum AO. & angulus LKA. contentus maiori basium LK. & minori laterum KA. Dico primo, angulum OAD. ad angulum KAD. maiorem habere rationem quam OLA. ad
10. 2. huius. KLA. minorem quam LOA. ad LKA. Nam cum maior sit

ratio

ratio AOL. ad ALO. quam AKL. ad ALK. erit componendo maior ratio vtriusque AOL. ALO. simul id est ipsius DAO. externi illis æqualis, ad ALO. quam AKL. ALK. simul, id est ipsius DAK. ad ALK. Rursus cum minor sit ratio OLA. ad LOA. quam KLA. ad AKL. erit componendo minor ratio vtriusque OLA. LOA. idest DAO. ad LOA. quam vtriusque KLA. AKL. idest ipsius DAK. ad AKL. & permutando. 32. 1. 10. 2. huius.

Sint secundo triangula AFL. AEL. in quibus complementa angulorum æqualibus lateribus compræhensorum, sint EAD. FAD. & angulus ELA. contentus minori basium EL. & maiori latere LA. angulus autem FLA. contentus maiori basium FL. & maiori latere LA. Rursus angulus LEA. contentus minori basium LE. & minori laterũ EA. & angulus LFA. contentus maiori basium LF. & minori latere FA. Dico angulũ EAD. ad angulũ FAD. minorem habere rationem quam angulum LEA. ad angulum LFA. maiorem verò quam ELA. ad FLA. Nam cum maior sit angulus AEL. angulo AFL. si vtrique addantur anguli, illi quidem minor ELA. isti maior FLA. maior erit ratio anguli AEL. ad angulum AFL. quam duorum AEL. ALE. simul, ad duos AFL. ALF. simul. Sed duobus AEL. ALE. simul æqualis est angulus externus EAD. & duobus itidem AFL. ALF. æqualis est externus FAD. Igitur maior est ratio AEL. ad AFL. quam EAD. ad FAD. ideoque minor EAD. ad FAD. quam AEL. ad AFL. Quod verò maior sit ratio EAD. ad FAD. quam ELA. ad FLA. patet, quia illic est ratio maioris inæqualitatis, hic vero minoris. Idem ostendetur in omnibus casibus in quibus triangulum AEL. cadet intra triangulum, vt intra triangula AOL. AKL. nam eodem modo probabimus maiorem esse rationem AEL. ad AOL. aut AKL. quam EAD. ad OAD. vel KAD. 21. 1. 6. 1. primi huius. 32. 1.

Sed sint tertio triangula AEL. LKA. feceritque LK. ipsam AF. Dico minorem esse rationem FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. maiorem vero quam FLA. ad KLA. Nam

ex secunda parte huius, maior est ratio AFL. ad AOL. quam FAD. ad OAD. & ex prima parte huius, maior est ratio AOL. ad AKL. quam OAD. ad KAD. Igitur ex æqualitate, maior est ratio AFL. ad AKL. quam FAD. ad KAD. ideoque minor FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. Denique cum maior sit ratio OAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. vt constat ex prima parte hu-
8. 5. ius propositionis, at vero multo maior sit ratio FAD. ad KAD. quam OAD. ad KAD. manifestum est maiorem esse rationem FAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. Quod tandem demonstrandum fuerat.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprahensum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus comprahensi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam habeat complementum anguli sub maiori basi, & minori latere contenti, ad duos rectos, in vno triangulo, ad complementum anguli sub minori basi, & minori latere in altero triangulo.

SINT eadem quæ superioribus propositionibus, sintque anguli KAL. OAL. æqualibus lateribur comprahensi, ille maior, hic minor: & sit primo LOA angulus contentus
. 3. minori base LO. & minori latere AO. Item angulus LKA. sub maiori basi LA. & minori latere AK. erit angulus AFO.
. def. & 5.1. æqualis angulo AOF. & angulus AEK. æqualis angulo AKE. Angulorum autem AFO. AEO. complementa ad
13. 1. duos rectos sunt AFL. AEL. Igitur angulorum AOL. AKL.

com-

complementa ad duos rectos sunt AFL. AEL. Dico maiorem esse rationem anguli KAL. ad angulum OAL. quam anguli AEL. ad angulum AFL. productis enim OAM. KAM. maior erit angulus externus OAD. angulo interno LOA. Item KAD. maior, quam LKA. & LOA. quã LKA. ille enim maiori arcui MF. insistit, hic minori NE. & arcus OK. differentia angulorum OAD. KAD. maior quã differentia angulorum LOA. LKA. (Nam eorum differentia est medietas arcus MN. seu KO. & medietas arcus EF. qui minor est quam KO. vt constat si ducatur ipsi *K*L. parallela OS. erit enim EF. minor quã ES. quæ æqualis est ipsi *K*O. quare etiam medietas ipsius EF. erit minor medietate reliqua ipsius *KO*:) Quare si per 14. primi huius, statuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti secunda quantitas, tertia autem quantitas sit angulus *OAD*. quarta *KAD*. quinta *LOA*. id est *AFO*. & sexta *LKA*. seu *AEK*. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis, auferantur anguli *OAD*. *KAD*. ex secunda autem, nimirum ex duobus rectis, demantur anguli *AFO*. *AEO*. cum angulus *OAD*. sit maior angulis *KAD*. *AFO*. & *AFO*. maior quam *AEK*. & differentia angulorum OAD. *KAD*. maior differentia angulorum *AFO*. *AEO*. erit ex dicta propositione 14. 1. huius ratio anguli *KAL*. (qui complementum est quartæ quantitatis *KAD*. ad duos rectos) ad angulum 14. 1. huius.

 OAL.

OAL. (qui est complementum tertiæ quantitatis *OAD.*) maior quam anguli *AEL.* (complementi sextæ quantitatis *AEK.*) ad angulum *AFL.* qui est complementum quintæ quantitatis AFO. Quod primo probandum erat.

Sint secundo anguli *LAF. LAE.* æqualibus lateribus cõpræhensi, ille maior, hic minor, & sit *LEA.* angulus contentus minori basi LE. & minori latere *EA.* Item angulus
8. 3. *LFA.* contentus maiori base LF. & latere minori *FA.* erunt
13. 1. 15. def. & anguli *AEK. AFO.*(æquales ipsis *AKE. AOF.*) complemen-
5. 1. ta angulorum *AEL. AFL.* ad duos rectos. Dico anguli *FAL.* ad angulum *EAL.* maiorem esse rationem, quam an-
9. 2. huius. guli *AOL.* ad angulum *AKL* Nam cum probata sit 9. huius, minor ratio anguli *ALF.* ad *FAL.* quam *ELA.* ad *EAL.* erit componendo minor ratio vtriusque *A*LF. *FAL.* id est
32. 1. & *AFO*: seu *AOL.* ad *FAL.* quam vtriusque *ELA. EAL.* id est
5. 1. *AEK.* id est. *AKE.* ad *EAL.* Quare conuertendo & permutando, maior est ratio *FAL.* ad *EAL.* quam *AOL.* ad *AKL.* Poterat hæc secunda pars ex principijs primæ partis huius deduci, sed vt breuitati consuleremus, eam aliunde deduximus.

Sint tertio anguli *FAL. KAL.* æqualibus lateribus compræhensi ille minor, hic maior; cadantque puncta *F. K.* illud sub punctum contactus, hoc supra, & sit *LFA.* angulus contentus sub basi minori LF. & minori latere *FA.* item angulus *LKA.* contentus sub basi maiori LK. & latere minori *KA.* Erit angulus *FAD.* complementum anguli *FA*L. ad duos rectos, & angulus *KAD.* complementũ anguli *AKL.* ad duos rectos minus complemento ipso *FAD.* vt pote pars toto, quorum differentia est angulus *KAF.* quæ maior est differentia angulorum *LFA.* & *LKA.* Nam ex prima parte huius propositionis constat, differentiam angulorum MOF. NKE. nimirum medietates arcuum MN. EF. esse minorem angulo *KAO.* Rursus angulus *LFA.* æqualis est
20. 3. duobus internis *FOA. FAO.* id est arcui OF. & dimidio arcui FM. & angulus NKE. dimidio arccui NE. Quare differentia

rentia angulorum *LFA* & *LKA*. id est EKN. erit totus arcus OF. vna cum medietate arcuum MN.EF. Sed medietas arcuum MN. EF. minor est angulo *KAO*. id est arcu KO. Igitur si communis addatur arcus OF. erit arcus KF. maior arcu OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. at vero arcus *KF* est differentia angulorum *FAD*. *KAD*. & arcus OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. est differentia angulorum LFA. LKA. Igitur maior est differentia angulorum FAD. & KAD. quam angulorum LFA. LKA. Quare rursus si per 14. primi huius statuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti secunda quantitas, tertia autem quantitas sit angulus FAD. quarta KAD. quinta LFA. sexta LKA. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis auferantur tertia FAD. & quarta *KAD*. ex secunda autem, videlicet ex duobus rectis demantur quinta LFA. & sexta LKA. sitque FAD. maior quam LFA. & quam KAD. & LFA. maior quã LKA. (Nam LFA. maior est quam LOA. & LOA. maior quam LKA. vt supra ostensum est) & differentia angulorum FAD. KAD. maior differentia angulorum LFA. LKA. erit ex dicta propositione 14. primi huius maior ratio anguli KAL. ad angulum FAL. videlicet complementi quartæ KAD. ad complementum tertiæ FAD. quam complementi anguli *LKA*. qui sexta quantitas est, ad complementum anguli *LFA*. qui quinta quantitas, positus est. Atque ita in quolibet alio situ ostendemus, quod propositum est. Quare si duo triangula &c. Quod fuit demonstrandum &c.

16. & 6. 1. pronunc.

14. 1. huius.

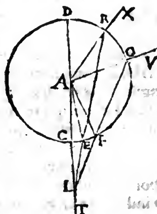
Hanc propositionem, etiam in sequenti, quam multo ampliorem reddidimus, facilius, ac breuius demonstrabimus, vt inde variæ probandi rationes, in vna, ac eadem materia, elucescant, quod à veteribus Geometris, ac Pappo præsertim, in collectionibus mathematicis, factitatum legimus.

THEO-

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprehensum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus comprehensi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam complementa angulorum reliquorum ad duos rectos si basibus, ac maiori laterum; item basibus ac minori laterum contenti, maioresque cum minoribus conferantur.

IN figura nonæ huius, habeant duo triangula LAK. LAO. duo latera LA. AK. duobus LA. AO. æqualia vtrumq; vtrique, & angulus comprehensus LAK. maior sit comprehenso LAO. Dico maiorem esse rationem anguli LAK. ad angulum LAO. quam complementi anguli AKL. ad duos rectos, ad complementum anguli AOL. Item quam complementi anguli ALK. ad complementum anguli ALO. producantur AL. in T. AO. in V. AK. in X. erunt anguli TLK. TLO. complementa angulorum ALK. ALO. ad duos rectos, &



13. 1. anguli XKL. VOL. complementa angulorum AKL. AOL. Quoniam maior est ratio anguli LAK. ad angulum AKL. quam anguli LAO. ad angulum AOL. erit componendo, & permutando maior ratio angulorum LAK. AKL. simul ad angulos LAO. AOL. simul, quam anguli

9.2. huius.

AKL.

AKL. ad angulum AOL. Quare cum maior ſit ratio totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL. ſimul,quam partis AKL. ad partem AOL. etiam reliqui LAK. ad reliquum LAO.maior erit ratio,quam totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL.ſimul:ipſis autem LAK.AKL.ſimul æqualis eſt externus TLK. & ipſis LAO. AOL. ſimul æqualis eſt externus TLO. Igitur maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum LAO.quam anguli TLK.ad angulum TLO. Rurſus quoniam maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum ALK. quam anguli LAO.ad angulum ALO.vt conſtat ex nona ſecundi huius,erit componendo, & permutando, maior ratio LAK. ALK. ſimul ad LAO. ALO. ſimul quã ALK.ad ALO. ideoque cum maior ſit ratio totius LAK. ALK. ad totum LAO.ALO.ſimul,quam partis ALK. ad partem ALO. etiã reliqui LAK. ad reliquum LAO. maior erit ratio quam totius LKA. AKL. ad totum LAO. ALO. ſed toti *LAK. ALK.* eſt æqualis angulus XKL.& toti *LAO.ALO.*æqualis eſt angulus VOL. Igitur anguli *LAK.* ad angulum LAO. maior eſt ratio quam anguli XKL. ad angulum VOL.

33. 5.
32. 1.
9. 2.huius.
32. 5.
32. 1.

Idem, eodem prorſus modo, demonſtrabitur in duobus triangulis quocumque ſitu collocatis; vt in triangulis LAE. LAF.item in triangulis LAO.LAE. Eadem enim vbique demonſtrandi forma, propoſitum efficiemus, vt inducenti manifeſtiſſime patet. Quare ſi duo triangula duo latera æqualia habuerint &c. Quod fuit demonſtrandum.

SCHOLIVM.

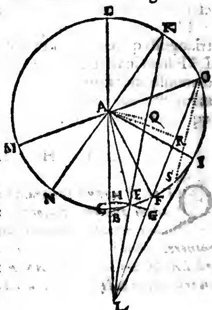
Quod ſi anguli comprahenſi ſint ſuis complementis ad idem punctum maiores, minor erit ratio angulorum comprahenſorum, quam ſuorum complementorum, ſi minores, maior, ex 22.primi huius: Vt minor eſt ratio LAK. ad LAO.quam DAO.ad DAK. maior vero ratio, LAF.ad LAE. in triangulis LAF. LAE. quam EAD. ad FAD.

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhensum angulo inæqualem; ex angulis autem æqualibus lateribus cõpræhensis in oppositas bases perpendiculares demittantur: anguli, quos perpendicularium maior cum lateribus facit, in maiori sunt ratione, quam quos minor, si maiores ad minores referantur.

IN figura superiorum propositionum, sint rursus triangula, quorum toties facta mentio, LAK. LAO. & ducantur ex puncto *A*. ad bases *LK*. LO. perpendiculares *AQ*. *AR*. hæc maior, illa minor. Dico maiorem esse rationem anguli *LAR*. ad angulum *RAO*. quam anguli *LAQ*. ad angulum *QAK*. Angulus enim *LOA*.
27. 3. maior est angulo *LKA*. Eo
18. 1. quod arcui MF. insistat, qui maior est quam arcus NE. Idem angulus *LOA*. maior est quam *OLA*. ob latus *AL*. subtendens maius quam latus *AO*. & angulus *OLA*. totum maius quam pars *KLA*. Rursus differentiam angulorum *LOA*. *LKA*. metitur medietas arcus MN. idest *KO*. & medietas arcus FE. ob arcus MF. NE. quibus dicti



angu-

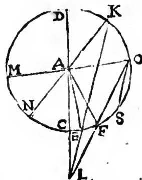
anguli insistunt. Differentia autem angulorum OLA. KLA. est angulus OLK. minor medietate arcus KO. (nã si duceretur recta KF. angulus KFO. externus, æqualis medietati arcus KO. est maior interno OLK.) Igitur differentia angulorum ad O. & K. maior est differẽtia angulorum OLA. KLA. 20. 3. 16. 1.
Quare si angulus rectus statuatur tam prima quam secunda quantitas; LOA tertia; LKA. quarta; OLA. quinta; KLA. sexta: erit per 14. 1. huius, maior ratio cõplementi KAQ. ad complementum OAR. quam complementi LAQ. ad complementum LAR. Quare & maior erit ratio LAR. ad LAQ. corol. 26. 5.
quam OAR. ad KAQ. & permutando maior LAR. ad OAR. quam LAQ. ad KAQ. Quod erat &c.

Eodem modo si statuantur triangula FAL. EAL. in quorum bases productas cadant perpendiculares eædem, AR. AQ. maior erit ratio LAR. ad FAR. id est, ad RAO. (æquales enim sunt anguli FAR. RAO.) quam LAQ. ad EAQ. qui ipsi QAK. est æqualis. Sch. 26. 1.

Denique in triangulis LAF. LAK. in quorum bases LF. productam, & LK. intra triangulum, cadant eædem perpendiculares AR. AQ. eodem modo ostendemus, maiorem esse rationem LAR. ad FAR. quam LAQ. ad QAK. Quod erat vltimo probandum.

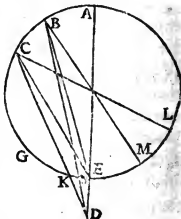
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

Isdem positis: Dico maiorem esse rationem LAF. ad LAE. quam OAD. ad KAD. Nam probatum est maiorem esse rationem LAF. ad LAE. quam AOL. ad AKL. & AOL. ad AKL. maiorem, quam OAD. ad KAD. Igitur LAF. ad LAE. maior est ratio, quam OAD. ad KAD. Quod fuit &c. 13. huius.



THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

IN circulo ABC. cuius centrum. F. diameter AE. sumatur extra circulum in diametro producta punctum D. à quo ducantur in conuexam peripheriam duæ rectæ DS. DK, quæ productæ secent cauam in B. C. sintq; puncta K. S. sub puncto contactus. G. quem efficit tangens circulum ducta recta DG. ex puncto D. & connectantur FK. FS. Dico maiorem esse rationem anguli FSD. ad angulum FKD. quam anguli BED. ad angulum CED. Ducantur CFL. BFM. secantes circulum in L. M. erit differentia angulorum LCK. MBS. id est FKC. FSB. illis æqualium medietas arcus ML. & medietas arcus KS. Differentia vero angulorum FEC. FEB. id est FCE. FBE. illis æqualium est medietas sola arcus CB. id est medietas arcus ML. maior igitur est differentia angulorum FKC. FSB. quam differentia angulorum FEC. FEB. maior etiam est angulus KCF. id est CKF. angulo ECF. id est FEC. idemq; angulus CKF. est maior angulo BSF. vt patet ex superioribus, & angulus FEC. maior angulo FEB. Quare si ex duobus rectis auferantur FKC. & FSB. item etiam ex duobus rectis demantur FEC. FEB. maior erit proportio complementi ipsius FSB. ad duos rectos, nimirum anguli FSD. ad complementum ipsius FKC. nimirum ad FKD. quam complementi ipsius FEB. videlicet ipsius BED. ad complementum ipsius FEC. nempe ad CED. Quod fuit probandum.



15. definit. & 5. 1.

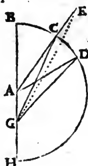
14. 1. huius.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ab extremitate diametri duo arcus inæquales, accipiantur ad quos ex duobus punctis diametri singulis duæ fectæ ducantur, sintq; duæ ex puncto propiore extremitati ductæ, aut æquales inter se, aut propinquior minor remotiore, & angulorum ad punctum remotius constitutorum maximus, maior sit angulo quem ex datis punctis ductæ ad remotiorem arcum efficiunt: anguli quos illæ cum diametro efficiunt constituti ad punctum remotius ab extremitate diametri, maiorem inter se proportionem habent, quàm constituti ad propinquius, si maiores cum minoribus conferantur.

In circulo BCD. cuius diameter AH. sumantur ab extremo puncto. B. duo arcus inæquales BD. maior BC. minor; & in diametro duo puncta, A. G. quorum illud extremitati B. vicinius sit, hoc remotius ex quibus ductæ sint ad arcus rectæ AC. AD. GC. GD. efficientes cum diametro angulos illæ quidem CAB. minorem, DAB. maiorem; istæ CGB. minorem DGB. maiorem; sintq; rectæ AD. AC. aut æquales inter se, aut AC. minor; & angulus AGD. maior angulo GDA. Dico maiorem esse rationem anguli DGB. ad angulum CGB. quam anguli DAB. ad angulum CAB. Sint primum lineæ AC. AD. inter se æquales. Quoniam duo triangula CAG. DAG. habeat duo latera. CA. AG. duobus lateribus DA. AG. æqualia, & angulus DAG. comprehensus minor est angulo compræhenso CAG. maiorq; est



10.2.huius angulus AGD. angulo ADG. ex ſuppoſitione,maior erit ratio anguli DGA. ad angulum ADG. quam CGA. ad ACG. & componendo maior ratio DGA. ADG. ſimul ad ADG. quam CGA. ACG. ſimul ad ACG. & permutando maior ratio DGA. ADG. ſimul ad CGA. ACG. ſimul quam ADG. ad ACG. Cum ergo totius AGD. ADG. ſimul, ad totum CGA. ACG. ſimul,maior ſit ra-
33. 5. tio quam partis ADG. ad partem ACG. & reliqui DGA. ad reliquum CGA. maior erit ratio quam totius DGA. ADG. id eſt anguli DAB. ad totum CGA. ACG. ſimul, id eſt angulum CAB.

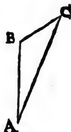
Sit rurſus linea AC. minor linea AD.producatur AC.in E.& ſumatur AE.æqualis ipſi AD.& iungatur GE.Cum æquales ſint AE. AD. eodem prorſus modo quo priore parte huius,oſtendemus maiorẽ eſſe rationem DGA.ad EGA.
8. 5. quam DAB. ad EAB. ſed adhuc maior eſt ratio DGA. ad CGA.quam ad EGA.(cũ minor ſit CGA. ipſo EGA.) Igitur anguli DGA. ad angulum CGA. maior eſt ratio quam anguli DAB. ad angulum CAB. Quod fuit &c.

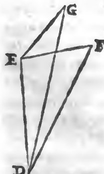
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI duo triangula habuerint duo latera circa angulos inæquales proportionalia; anguli maioris compræhenſi ad reliquos maior erit ratio, quam anguli minoris compræhenſi ad reliquos, ſi prout proportionalibus lateribus opponuntur, inter ſe conferantur. Et trianguli, in quo eſt minor angulus compræhenſus, reliquorum angulorum maior ad minorem maiorem habet rationẽ, quam in alio triangulo reliquorum maior ad minorem.

Sint duo triangula ABC. DEF. quæ habeant duo latera AB. DE. Idem BC. DE. circa angulos inæquales ABC.

ABC. maius DEF. minus, proportionalia; sitq; vt AB. ad BC. ita DE. ad EF. Dico maiorem esse rationem anguli ABC. ad angulum BAC. quam anguli DEF. ad angulum EDF. Item maiorem ABC. ad BCA. quam DEG. ad EGD. Deniq; si EFD. maior sit quã EDF. maiorem esse rationem EFD. ad EDF. quam BCA. ad BAC. Fiat ad rectam DE. angulus DEG. æqualis angulo ABC. & sumatur EG. æqualis ipsi EF. Quoniam est vt AB. ad BC. ita DE. ad EF. ex hypothesi, & vt DE. ad EF. ita DE. ad EG. ipsi EF. sumptam æqualem erit vt AB. ad BC. ita DE. ad EG. sunt autem, ex hypothesi, anguli ABC. DEG. æquales, erunt ergo triangula ABC. AEG. similia. Quoniam ergo in triangulis DEF. DEG. angulus DEG. maior est angulo DEF. & latera DE. EG. lateribus DE. EF. æqualia sunt, constat primò ex 9. proposit. secundi huius maiorem esse rationem anguli DEG. ad angulum EGD. id est ABC. ad BCA. quam anguli DEF. ad angulum EFD. Item maiorem eiusdem anguli DEG. ad angulum EDG. id est ABC. ad BAC. quam DEF. ad EDF. Constat secundo ex 10. propositione secundi huius maiorem esse rationem EFD. ad EDF. quam EGD. ad EDG. id est quam BCA. ad BAC. Quod erat &c.





9. 2. huius.

10. 2. huius.

SCHOLIVM.

Atq; ita triangulis habentibus duo latera, circa angulum inæqualem, proportionalia, aptauimus propositiones nonam, & decimam huius. Eadem vero ratione illis accommodari possunt quæcumq; propositionibus 11. 12. 13. 14. 15. *demonstrata*

strata sunt; Nam quæcumq; de inæquali angulorum ratione, in triangulis duo latera æqualia circa inæqualem angulum habentibus ostensa sunt, eadem etiam triangulis duo latera proportionalia circa angulum inæqualem obtinentibus conueniunt; modo latera vnius, aut maiora, aut minora, eo pacto, quo in hac propositione factum est, ad latera alterius reducantur. Quod quia manifestissimum est, probatione, vtpote superuacanea, abstinebo.

Habent autem superiores propositiones, ac præsertim posteriores, a nona, mirum in Geometricis vsum, vt ex sequentibus passim constabit: ac quemadmodum in superiori libro, ex æqualitate vnius anguli, in duobus triangulis, magno vsu inquisiuimus inæqualem laterum rationem, proposit. 23.24.25. ita hic ex duobus lateribus aut æqualibus, aut proportionalibus, in duobus triangulis angulorum inæqualem proportionem non minori compendio peruestigamus.

Vt vero memoriæ consulamus, eorum quæ hac de re hactenus probauimus, hic epilogismus esto.

In figura 13. huius inspiciantur duo triangula LAK. LAO. quæ habeant LA. AK. lateribus LA. AO. aut æqualia aut proportionalia, circa angulos LAK. LAO. maiorem illum hunc minorem, sintq; reliqua superioribus propositionibus delineata.

9. huius. *I. LAK. ad AKL. maiorem habet rationem quam LAO. ad AOL.*

9. huius. *II. LAK. ad ALK. maiorem habet rationem quam LAO. ad ALO.*

10. huius. *III. Maior est ratio LOA. ad OLA. quam LKA. ad KLA.*

12.& 13. hui. *IV. Ratio KAL. ad OAL. est maior, quam XKL. ad VOL.*

13. huius. *V. Ratio KAL. ad OAL. est maior, quam TLK. ad TLO.*

11. huius. *VI. Maior ratio LOA. ad LKA. quam OAD. ad KAD.*

11. huius. *VII. Minor est ratio OLA. ad KLA. quam OAD. ad KAD.*

14. huius. *VIII. LAR. ad RAO. maiorem rationem habet, quam QLA. ad QAK.*

15. huius. *IX. Proportio LAF. ad LAE. maior est, quam OAD. ad KAD.*

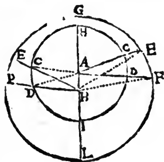
16. huius. *X. Ratio KCL. ad OCL. minor est, quam AEL. ad AFL.*

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſintq; vtriuſq; centra intra circulum minorem, ex quorum vtrouis duæ rectæ ducantur circulos ſecantes arcus dictis lineis contenti, ad arcus vtrauis harum linearum, & ſemidiametro maioris circuli, in qua eſt centrum minoris compræhenſos, maiorem habent rationem in exteriori circulo quam in interiori, ad eorum vero complementa ad duos rectos, maiorem.

Sint duo circuli GEF. HCD. eccentrici, ille maior, qui hunc minorem contineat, illius centrum B. huius A. vtrumque intra circulum minorem HCD. ac recta per vtriuſque centrum ducta LG. ſecans circulorum peripherias maioris quidem in L.G. punctis, minoris in I. H. & ſit centrum circuli minoris A. in ſemidiametro circuli maioris BG. Ducantur primum (vt videre eſt in ſiniſtro ſemicirculo huius figuræ) duæ rectæ ex centro circuli minoris AE. AF. ſecantes exteriorem circulum in E. F. interiorem in C. D. & connectantur BE. BF. Dico maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. aut FE. ad FG. quam DC. ad DH. minorem vero eſſe proportionem EF. ad FL. quam CD. ad DI. aut EF. ad EL. quam CD. ad CI. Cum enim duo triangula FBA. EBA. habeant duo latera FB. BA. duobus EB. BA. æqualia, vtrumq; vtriq; in eodem vero triangulo inæqualia, maior enim FB. id eſt GB. quam BA. & 15. def.



angulus

13.2.huius. angulus FBA. maior angulo EBA. erit maior ratio angu-
33. 6. li FBA. hoc est arcus FG.ad angulum EBA. id est arcum
13. 1. EG. quam complementi anguli FAB. id est angulus FAG. hoc est arcus DH. ad complementum anguli EAB. id est angulum CAG. hoc est arcum CH. hoc enim 13. huius demonstratum est, & diuidendo maior ratio FE. ad EG. quam DC. ad CH. &c.

Rursus in ijsdem triangulis, angulus EAB. continetur sub minori basi EA. & minori latere AB. & angulus FAB.
7. 3. sub maiori basi FA. & minori latere AB. suntque anguli EBL. FBL. complementa angulorum æqualibus lateribus
11.2. huius. compræhensorum. Igitur maior est ratio anguli EAB. ad angulum FAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quam anguli EBL. ad arcum FBL. id est quam arcus EL. ad arcum FL. vt vndecima secundi huius probatum est & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. & componendo, conuertendo, ac per conuersionem rationis, maior ratio CD. ad CI. quam EF. ad EL. Quod fuit primo demonstrandum.

Sed ducantur secundo (in dextra parte figuræ) ex centro B. maioris circuli duæ BE. BF. secantes externum circulum in punctis F. E. internum in punctis D. C. & connectantur AC. AD. Dico maiorem esse rationem arcus FE. ad arcum EG. quam DC. ad CH. maiorem vero CD. ad DI. quam EF. ad FL.

Rursus cum duo triangula CAB. DAB. habeant duo latera CA. AB. duobus lateribus DA. AB. æqualia vtrum-
15. definit. que vtriq; in eodem vero triangulo inęqualia nam maior est CA. id est AI. parte AB. & angulus CAB. maior angu-
15. definit. lo DAB. erit ex 13. secūdi huius, maior ratio anguli CAB.
13.2.huius. ad angulum DAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quā complementi anguli CBA. id est anguli EBL. id est arcus EL. ad complementū anguli DBA. id est angulum FBL. id est arcū FL. & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL.

Denique in ijsdem triangulis anguli DBA. CBA. continentur,

tinentur, ille sub minori basi, & minori latere, hic sub maiori basi, & minori latere suntque DAH. CAH. complementa angulorum æqualibus lateribus comprahensorum.

Igitur, ex 11. secundi huius, maior est ratio anguli DBA. ad angulum CBA. idest arcus FG. ad arcum EG. quam anguli DAH. ad an gulum CA H. idest arcus DH. ad arcum CH. & diuidendo. Igitur si sint duo circuli eccentrici &c. Quod erat demonstrandum. 11.2. huius.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI sint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, sitque maioris centrum in peripheria minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abscindunt, quorum exterior ad arcum sui circuli inter vtramuis linearum, & semidiametrum maioris circuli, in qua est centrum circuli minoris, comprahensum, maiorem rationem habet, quam interior ad suum, ad complementum vero minorem. Duæ verò rectæ ex centro maioris circuli ductæ auferunt arcus proportionales arcubus ductis à lineis versus semidiametrum maioris circuli in qua est centrum minoris; ex alia verò parte maiori proportione interiores quam exteriores.

Sint ijdem circuli, qui in superiori propositione, sed centrum maioris B. cadat in peripheriam minoris, & ex centro minoris A. ductæ rectæ AE. AF. in sinistra parte schematis abscindunt ex maiori circulo arcum EF. ex minori arcum CD. Dico rursus maiorem esse rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & maiorem CD. ad DB. quam EF. ad FL. Cum enim sit eadem dispositio, ac ratio triangulorum FBA. EBA

quæ in prima parte præcedentis propositionis, eadem etiam omnino demonstratione, ex 13. huius, probabimus quod propositum est, vt ideo necesse non sit superflua repetitione lectorem detinere.

Sed ducantur in dextra parte schematis ex centro maioris circuli B. duæ rectæ BE. BF. secantes exteriorem circulum in punctis E. F. interiorem in punctis CD. Dico eandem esse rationem arcus DC. ad arcum CH. quæ
20. 3. arcus FE. ad arcum EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF.
15. 5. ad FL. Nam anguli HAD. HAC. dupli sunt angulorum,
33. 6. GBF. GBE. igitur vt GAD. ad GAC. ita GBF. ad GBE. id est, vt arcus DH. ad arcum DC. ita arcus FG. ad arcum EG.
20. 3. & diuidendo.

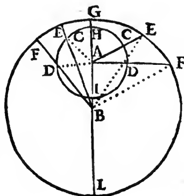
Denique quia ratione maior est arcus CD. quam EF. &
16. 1. minor DB. quam FL. angulus enim FBL. idest arcus FL.
8. 5. maior est angulo BAD. hoc est arcu DB. maior erit ratio
8. 5. CD. ad DB. quam EF. ad DB. sed EF. ad DB. habet maiorem rationem quam EF. ad FL. Igitur maior est ratio CD. ad DB. quam EF. ad FL. Quod vltimo probandum erat.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI sint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, sitq; maiori centrũ extra peripheriam minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ ex vtroque circulo arcus abscindunt, quorum exterior ad arcum sui circuli inter vtramuis linearum, & semidiametrum maioris circuli, in

qua est centrum circuli minoris, compræhensum, maiorem rationem habet quam interior ad suum, ad complementum vero, minorem. At vero duæ rectæ ex maioris centro ductæ vtrumque circulum secantes, arcus abscindunt, quorum interior ad vtrumuis arcuum inter ductas, & diametrum compræhensum in suo circulo, maiorem habet rationem, quam exterior ad arcus similiter positos, in suo.

Ponantur ijdem circuli, qui duabus superioribus propositionibus, sed centrum maioris B. cadat extra ambitum minoris, & ex centro minoris A. ducantur, vt prius in sinistra parte figuræ rectæ AE. AF. abscindentes ex minori circulo arcum DC. ex maiori arcum FE. Dico iterum maiorem esse rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & minorem EF. ad FL. quam CD. ad DI. Hoc vero ex duobus triangulis FBA. EBA. eadem omnino ratione probatur qua in 1. parte 19. huius.



At verò duc rectæ BE. BF. ex centro maioris circuli prodeuntes, (vt cernere est in dextro semicirculo) auferant ex circulo minori arcum CD. ex maiori arcum EF. Dico maiorem esse rationem DC. ad CH. quam FE. ad EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF. ad FL. Cum enim duo triangula CAB. DAB. duo latera CA. AB. duobus lateribus DA AB. æqualia habeant, vtrumque vtrique & angulus CAB. maior angulo compræhenso DAB. complementa angulorum compræhensorum nimirum anguli DAG. CAG 15. defin.

33. 6. ad duos rectos id est arcus DH.CH. maiorem habent ratio-
21.2. huius. nem quã angulus sub minori basi DB.& maiori latere BA.
8. 3. ad angulum CBA. sub maiori basi BC.& maiori latere BA.
1. pron. contentum. hoc est quam arcus FG. ad arcum EG. & diuidendo maior ratio DC. ad CH. quam FE. ad EG.

13.2. huius. Denique in ijsdem triangulis, maior est ratio anguli cõ-
33. 6. præhensi CAB. ad compræhensum DAB. id est arcus CI. ad arcum DI. quam complementi anguli CBA. ad comple-
13 1. mentum anguli DBA. ad duos rectos, id est quam angulus
33. 6. EBL. ad angulum FBL. id est quam arcus EL. ad arcum FL. vt 13. huius demonstratum est, & diuidendo, maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. Quod fuit vltimo loco probandum.

SCHOLIVM.

Ex ijs quæ tribus hisce propositionibus demonstrata sunt, manifestum est.

1 Si sint duo circuli eccentrici quorum maior minorem contineat, semper contingere, vt duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abscindant, quorum exterior inter vtramuis rectorum, & semidiametrum maioris circuli, in qua est centrum circuli minoris, compræhensus, maiorem rationem habeat, quam interior ad suum, ad complementum vero minorem. Nam in primis figuris 19. 20. 21. *huius demonstratum est perpetuo, maiorem esse rationem FE. ad EG. quam DC. ad CG. minorem vero EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

2 Iisdem positis, si duæ rectæ ex maioris circuli centro ductæ, arcus ex vtroque circulo abscindant, semper exterior, ad arcum sui circuli vtrauis ductarum rectarum, & semidiametro maioris circuli, in qua non est centrum minoris, compræhensum, minorem habet rationem, quam interior ad arcum eodem modo compræhensum. Nam in secundis figuris 19. 20. 21. *huius probatum est semper minorem esse rationem EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

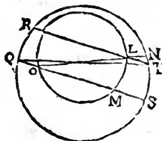
3 *Adhuc*

3 *Adhuc iiſdem poſitis, ſi duæ rectæ ex maioris centro ductæ arcus ex vtroque circulo abſcindant, qui comparentur cum arcubus inter vtramuis rectarum, & ſemidiametrum maioris circuli in qua eſt centrum minoris, contentis: ſi quidem centrum maioris ſit intra circulum minorem, maior eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quam interioris ad ſuum; ſi idem centrum ſit intra peripheriam minoris, eadem eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quæ interioris ad ſuum: denique ſi idem centrum fuerit extra ambitum minoris, arcus exterior abſciſſus ad ſuum arcum minorem habet rationem, quam interior ad ſuum. Probatum enim eſt in ſecunda figura 19. maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. In ſecunda 20. eandem eſſe rationem FE. ad EG. quæ DC. ad CH. Denique in ſecunda 21. minorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH.*

LEMMA I.

SI circulus circulum contineat, parallelæ rectæ lineæ vtrumque circulum ſecantes, maiores in interiori circulo proportione arcus comprændunt quam in exteriori.

Contineat circulus NS. circulum LM. & parallelæ RT. QS. ſecent vtrumque circulum, exteriorem in T. S. interiorem in LM. Dico arcum LM. interiorem dictis parallelis comprahenſum, proportionem maiorem eſſe arcu TS. comprænſo iiſdem parallelis in circulo exteriori. Connectatur QT. & OL. quæ producatur dum circulum exteriorem ſecet in L. manifeſtum eſt punctum N. cadere ſupra punctum T. ideoque lineas ON. QT. ſe ſe inuicem ſecare inter puncta N. O.



16. 1. N.O. Cum igitur angulus externus LOM. maior sit inter-
33. 6. no TQS. vt autem angulus LOM. ad angulum TQS. ita
proportione arcus LM. ad arcum TS. maior igitur propor-
tione est arcus LM. arcu TS. Quod fuit ostendendum.

LEMMA II.

SI circulus circulum contineat, duæ rectæ ex puncto vtriusuis peripheriæ, quod vtrique peripheriæ commune non sit, circulum vtrumq; secantes, maiores ex interiore circulo proportione arcus auferunt, quam ex exteriori.

Contineat circulus FD. circulum GC. ac primum ex puncto A. exterioris circuli duæ rectæ ducantur AF. AD. secantes exteriorem circulum in punctis F. D. interiorem in punctis GH. Dico arcum CH. lineis AF. AD. comprehensum in interiori circulo, proportione maiorem esse arcu FD. ijsdem rectis in exteriori circulo comprehensum. Connecta-
16. 1. tur HB. erit angulus GBH. maior
33. 6. angulo FAD. sed vt GBH. ad FAD.
ita proportione arcus GH. ad arcũ FD. igitur arcus GH. maior est proportione quam arcus FD.

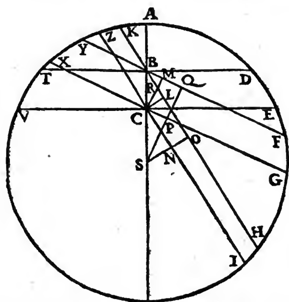
Rursus ex puncto B. interiori circuli ducantur duæ rectæ BF. BD. secantes internum circulum in punctis G. C. externum in punctis F. D. Dico arcum GC. proportione maiorẽ
16. 1. esse arcu FD. Ducatur AD. erit angulus GBC. maior angulo FAD. vt autem angulus GBC. ad angulum FAD. ita proportione arcus GC. ad arcum FD. Igitur maior est proportione arcus GC. arcu FD. Quod erat &c.

LEM-

LEMMA. III.

PArallelarum rectarum, quæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ducuntur, quæ perpendiculares sunt, maximum arcum comprehendunt, & reliquarum, quæ perpendicularibus sunt viciniores maiorem quam quæ remotiores: Rectarum verò quæ ex eodem puncto diametri vtrinque circulum secant, perpendiculares minimum arcum subtendunt, reliquæ autem eo maiorem, quo magis à perpendicularibus distant.

Sit circulus ADI. cuius centrum S. diameter AS. in qua sumantur duo puncta B.C. ex quibus ducantur duæ paralle-



læ BD.CE. & BF.CG. & BH.CI. sintque BD.CE. etiam perpen-

pendiculares ad AS. & duæ BF. BG. viciniores dictis perpendicularibus, quam BH. CI. Dico arcuum qui dictis parallelis comprehenduntur maximum esse DE. hinc FG. maiorem quam HI. arcuum vero quos rectæ CE. CG. CI. prodeuntes ex eodem puncto C. & productæ in reliquam circumferentiam in puncta V. X. Z. subtendunt minimum esse VAE. maximum ZCI. & XCG. maiorem quam VAE. Item productis DB. FB. HB. in puncta T. Y. K. minimum esse arcum TAD. maiorem YAF. maximum KAH. Ducantur CM. CL. perpendiculares ad BF. BH. & secet CM. ipsam CH. in R. Item ex centro S. ad easdem, perpendiculares SQ. SO.
29. 1. secantes etiam rectas CG. CI. in punctis N. P. erunt etiam
19. 1. anguli SNC. SPC. recti: minor igitur SN. quam SP. & SP. quam SC. Quare cum minor sit distantia chordæ ICZ. à centro S. quam chordæ GCX. & chordæ GCX. minor quã
15. 3. chordæ ECV. maior erit ICZ. quam GCX. & GCX. quam
19. 1. ECV. Eodem modo cum minor sit SO. quam SQ. & SQ. quam SB. quæ distantię sunt chordarum HK. FY. DT. à cen-
15. 13. Schol. 28. 3. tro S. maior erit HK. quam FY. & FY. quam DT. Igitur maior est arcus ZAI. arcu XAG. & XAG. maior ipso VCE. Item maior est arcus KAH. ipso YBF. & YBF. arcu TBD. Quod secundo loco propositum erat.

19. 1. Rursus quia in triangulo rectangulo CMB. maior est CB.
19. 1. quam CM. & CM. totum, quam pars CR. & CR. quam CL.
34. 1. suntque CB. & CM. id est PQ. ipsi CM. æqualis; item CL. hoc est NO. ipsi CO. æqualis, differentiæ sinuum versorum, quarum maxime vicina centro est NO. remotior PQ. remo-
29. 1. huius. tissima CB. vt paulo ante ostensum est, erit, ex 29. primi huius, minor ratio CB. ad PQ. quam arcus DE. ad arcum
8. 5. FG. Quare erit vt CB. ad minorem quam PQ. id est quam CM. ita arcus DE. ad arcum FG. maior autem est ostensa CB. quam CM. multo igitur maior erit CB. quam recta minor ipsa CM. ideoque maior arcus DE. quam arcus FG. Atque eodem modo cum maior sit MC. quam CL. id est PQ. quam NO. ostendemus arcum FG. esse maiorem arcu HI. Quod primo loco propositum fuerat. SCHO-

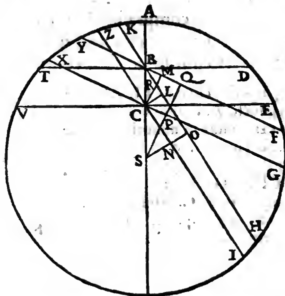
SCHOLIVM.

INtelligenda est secunda pars lemmatis de arcubus minoribus semicirculo, nam si de maioribus sermo sit manifestum est à maiori chorda minorem arcum auferri, quam à minori; ex Scholio 28. 3.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

ARcuum, quos duæ parallelæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ductæ subtendunt, maximam habent inter se rationem quos perpendiculares, minimam quos remotissimæ à parallelis subtendunt, si maiores cum minoribus comparentur, singulique semicirculo minores existant.

IN figura superioris Lemmatis. Dico maiorem esse ra-



tionem arcus VAE. ad arcum TAD. quam arcus XAG. ad

O arcum

arcum YAF. & arcus XAG. ad arcum YAF. maiorem, quã arcus ZAI. ad arcum KAH. Nam vt superiori Lemmate ostensum est, minor est arcus TAD. arcu YAF. & maior TV. quam XY. ideoque eius duplum TV. DE. simul maius
8. 5. quam XY. FG. simul. Igitur maior est ratio TV. DE. simul ad TAD. quam XY. FG. simul ad YAF. & componendo, maior ratio VAE. arcus, ad arcum TAD. quam XAG. ad YAF. Atque eodem prorsus modo ostendetur maiorem esse rationem XAG. ad YAF. quam ZAI. ad KAH. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI duo circuli sese interius contingant, atque ex duobus punctis diametri communis duæ parallelæ ducantur vtrumque circulum secantes: duorum arcuum inter duas extremitates diametri, & parallelas comprænhensorum, maior erit inter se ratio in interiori circulo, quam in exteriori, si maiores cum minoribus comparentur.

Contingãt se due circuli ABL. ADI. ille externus, hic in-
11. 3. ternus, in puncto A. ex quo ducatur communis diameter AL. cuius extremitas in minori circulo sit I. in maiori L. punctum, & ex duobus punctis C. F. in diametro sumptis ducantur duę parallelæ CDB. FGE. secantes interiorem circulum in punctis D. G. exteriorem in B. E. & auferentes ex vtroque circulo duos arcus versus extremitates I. & L. videlicet arcus DI. GI. in interno circulo, & arcus BL. EL. in externo. Dico maiorem esse rationem arcus DI. maioris ad minorem GI. quam arcus BL. maioris ad minorem EL. Ducantur rectæ AG. AD. & producan-



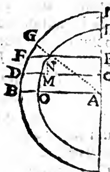
ducantur, dum externum circulum secent in punctis M. N. manifestum est punctum M. cadere sub punctum E. (cum puncta G. E. sint in eadem recta FE. & cadat punctum M. sub punctum G.) & punctum N. sub punctum B. maior igitur est arcus NA. arcu BA. & arcus MA. arcu EA. arcubus autem MA. NA. proportione æquales sunt arcus GA. DA. singuli singulis, vt constat ex Scholio 22. 3. Igitur arcus GA. proportione maior est quam arcus EA. & DA. quam BA. Cum autem æquales sint proportione semicirculi AL. AI. ablatis inæqualibus AE. AG. remanent inæquales EL. maior GI. minor: minor igitur est ratio IG. ad GD. quã LE. ad GD. sed arcus LE. ad arcũ GD. etiã minorem habet rationem, quam ad arcum EB. qui superiori Lemmate probatus est minor arcu GD. Igitur minor est ratio IG. ad GD. quam LE. ad EB. & conuertendo, ac componendo, maior est ratio arcus DI. ad arcum GI. quam arcus BL. ad arcum EL. Quod fuerat demonstrandum.

Schol. 22. 3. & Pappus Alexan. Lemmate ad 8. 4. 5. pron. 8. 5.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI sint duo Quadrantes concentrici, ac lateri communi duę parallelę ducantur: arcus compræhensus aut latere, & vna parallelarum; aut vtraque parallela; ad reliquum Quadrantis arcum magis à latere distantem, maiorem habet rationem in circulo interiori, quam in exteriori.

Sint duo Quadrantes ex eodem centro A. descripti IFB. externus, LNO. internus, quorum commune latus AB. secans externum in B. internum in O. cui parallelæ sint DC. FE. secantes reliquum latus in C. E. internũ circulum in M. N. externum in D. F. sintque reliqui Quadrantis arcus magis à latere AB. distantes, interior NL. exterior FI. Dico maiorem



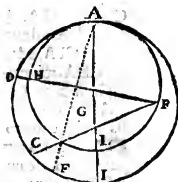
iorem esse rationem ON. ad NL. quam BF. ad FI. Item maiorem rationem MN. ad NL. quam DF. ad FI. Ducatur AN. quæ producta secet externum circulum in G. erunt arcus NL. GI. proportione æquales, maior autem est FI.
33. 6. quam GI. Igitur arcus FI. proportione maior est, quam NL. sed & ON. maior est pro-
Lemm. 1. huius. portione quam BF. & MN. proportione maior, quam DF. Quare cum maior sit proportione ON. quam BF. & NL. minor etiam proportione quam FI. maior erit ratio ON. ad
8. 5. NL. quam BF. ad FI. Item cum maior sit proportione MN.
Lemm. 1. huius. quam DF. & NL. minor proportione quam FI. eodem modo maior erit ratio MN. ad NL. quam DF. ad FI. Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo circuli sese interius contingant; duæ rectæ ex puncto vtriusuis peripheriæ, in quo non sit contactus, circulum vtrumque secantes, arcus compræhendunt, quorum interior ad arcum inter compræhensum, & extremitatem cõmunis diametri puncto contactus oppositam maiorem habet rationem quam exterior.

Duo circuli ADI. AHL. contingant sese interius in puncto A. sitque interior AHL. exterior ADI. ac primum ex puncto B. in interiori circulo, ducantur duæ rectæ BC. BD. secantes interiorem circulum in punctis G. H exteriorem in punctis C. D. sitque communis diameter ALI. secans inte-

riorem



riorem circulum in L. exteriorem in I. erit arcus HG. compræhensus inter rectas BD. BC. in interiori circulo, & DC. in exteriori; & arcus GL. contentus inter arcum HG. & punctum, seu extremitatem diametri L. puncto contactus oppositam: arcus verò CI. contentus inter DC. & similem extremitatem in circulo exteriori. Dico maiorem esse rationem HG. ad GL. quam DC. ad CI. Ducatur per punctum G. recta AG. quæ producta secet exteriorem circulum in puncto F. Erunt arcus GL. FI. proportione æquales, maior autem est arcus CI. arcu FI. Igitur proportione maior est arcus CI. quam arcus GL. Sed & proportione maior est arcus HG. arcu DC. Igitur cum maior sit proportione HG. quam DC. maior erit ratio HG. ad GL. quam DC. ad GL: & cum maior sit proportione CI. quam GL. maior erit ratio DC. ad GL. quam DC. ad CI. Igitur maior est ratio HG. ad GL. quam DC. ad CI.

Schol. 22. 3. & pappus Lemm. ad 8. 4. collectionũ Lemm. 2. 2. huius. 8. 5. 8. 5.

Idem eodem modo demonstrabitur si punctum B. sumatur in exteriori circulo. Quare si duo circuli sese interius contingant &c. Quod erat demonstrandum.

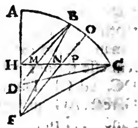
THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI fuerint quatuor anguli proportionales singuli minores recto, ac primus maior secundo, ac tertio; maior erit ratio tangentis primi, ad tangentem secundi, quàm tangentis tertij, ad tangentem quarti.

Sint duo anguli quicumque minores recto CDA. DBA. item duo alij quicumque CFA. OFA. sitque HDC. maior

tam

tam ipso BDA. quam CFA. & sit vt CDA. ad BDA. ita CFA. ad OFA. Dico maiorem esse rationem tangentis anguli CDA. ad tangentem anguli BDA. quam sit tangentis anguli CFA. ad tangentem anguli OFA. Contineat angulus CDA. minorem BDA. & ex quolibet puncto C. rectæ DC. ducatur CH. perpendicularis ad DA. fiatque angulus HCF. æqualis complemento ipsis CFA. erit CFA. angulus tertius, qui cadet sub punctum D. cum sit minor quàm ADC. & contineat angulum quartum minorem AFO. & distantia FC. describatur circulus FCA. secans priores lineas in C. O. B. A. & connectatur FB. quæ secet CH. in N. & DB. secet eandem in M. Item FO. secet eandem in P. cadet punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Nam cum triangula CFD. BFD. habeāt circa angulos inæquales CFD. BFD. duo latera CF. FD. duobus lateribus BF. FD. æqualia vtrūque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia; maior erit ratio CFA. ad BFA. quàm CDA. ad BDA. ideoque habebit angulus CFA. ad aliquem angulum maiorem ipso CFB. eandem rationem, quàm CDA. ad BDA. Igitur angulus AFO. ad quem eandem proportionem habet, est maior, quàm AFB. cadet igitur punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Iam dicta perpendicularis CH. erit tangens tàm anguli CFA. quàm anguli CDA. recta NB. tangens anguli BFA. MH. tangens anguli BDA. & PH. tangens anguli OFA. constat punctum N. cadere inter M. & C. item ostensum est punctum P. cadere inter N. & C. quare multo maior est PH. quam MH. Igitur maior erit ratio CH. tangentis anguli CDA. ad MH. tangentem anguli BDA. posito sinu toto DH. quam CH. tangentis anguli CFA. ad PH. tangentem anguli OFA. posito sinu toto FH. Quod erat demonstrandum.



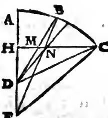
13. aut 17. 2. huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SI fuerint quatuor tangentes proportionales, maiorque prima quam ſecunda & tertia, minor erit ratio primi anguli reſpondentis primæ tangenti ad ſecundum, quam tertij ad quartum.

Sint quatuor tangentes E. G. I. K. ſitque vt E. ad G. ita I. ad K. ſitque E. maior quàm G. maior item quàm I. centro F. deſcribatur circulus ABC. diametro FA. & ſit arcus AC. ſeu angulus AFC. reſpondens tangenti I. & arcus AB. ſeu angulus AFB. reſpondens tangenti K. hinc ducta CH. ad FA. perpendiculari, primi anguli cõplementum ſit HCD. erit ADC. primus angulus, & cum angulus ADC.



ſit maior, quàm HFC. (nam maioris anguli maior tangens) cadet punctum D. inter H. & F. (ſi enim caderet in F. eſſet angulo AFC. æqualis, ſi infra minor) & connectatur DB. quæ ſecet HC. in M. & ducatur DN. ſecans HC. in N. erit punctum M. inter H. & N. & angulus HDN. angulus ſecundus reſpondens ipſi G. Nam cum CH. ſit tangens anguli AFC. & NH. tangens anguli BFA. item CH. tangens anguli HDC. Nam eſt, vt I. ad K. ita CH. ad HN. ſed vt I. ad K. ita E. ad G. & vt E. ad G. ita CH. tangens anguli HDC. ad HN. (vtrobique enim eſt proportio æqualitatis) tangentem anguli HDN. Dico minorem eſſe rationem CDH. ad NDH. quàm CFA. ad BFA. Cũ enim in ſuperiori ex 13. & 17. 2. huius oſtenſum ſit, maiorẽ eſſe proportionem anguli CFA. ad BFA. quàm CDH. ad MDH. & CDH. ad MDH. maior ſit ratio, quàm CDH. ad NDH. maior erit proportio anguli tertij CFA. ad angulũ quartũ BFA. quã primi CDH. ad ſecundum NDH. ideoq; minor ratio primi anguli CDH 8. 5.

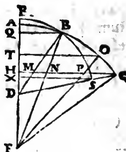
ad

ad secundum NDH. quàm tertij CFA. ad quartum BFA. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI sint quatuor anguli proportionales, sitque primus maior secundo, ac tertio; minor erit ratio sinus recti, ac chordæ primi ad chordam, & sinum secundi, quàm sinus, & chordæ tertij, ad sinum, & chordam quarti.

Sint quatuor anguli proportionales dispositi, vt in figura penultima huius, sitque vt CDH. ad MDH. ita CFA. ad OFA. eodem modo quo vigesima sexta huius ostendemus punctum P. cadere inter N. & C. Centro D. distantia DB. describatur arcus RBS. secans diametrum FA. in R. & DC. in S. Cum DB. sit minor quàm DC. erit DS. illi æqualis minor quàm DC. cadet punctum S. inter D. & C. Ducantur sinus BQ. OT. SX. erit CH. sinus rectus anguli CFA. & BQ. sinus rectus anguli BFA. respectu sinus totius FA. item SX. sinus rectus arcus RS. seu anguli CDA. & BQ. sinus rectus arcus BR. seu anguli BDA. respectu sinus totius DB. seu DC. & OT. sinus rectus anguli OFA. respectu sinus totius FA. Cùm minor sit SX. quàm CH. minor erit ratio SX. sinus anguli primi CDA. ad BQ. sinum rectum



anguli secundi BDA. quàm CH. sinus recti anguli tertij CFA. ad BQ. sinum rectum anguli BDA. qui cum minor sit quàm OT. multò minor erit ratio SX. ad BQ. quàm CH. ad OT. sinum quartum anguli OCR. Quod erat ostendendum.

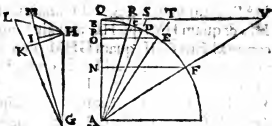
Idem

Idem ostendetur in chordis, si enim propositi sint quatuor arcus proportionales, accipiantur eorum dimidij: ostendetur minorem esse rationem sinus primi ad secundum, quàm tertij ad quartum: vt verò dimidium ad dimidium, ita totum ad totũ, quare minor erit ratio dupli sinus, id est chordæ primæ ad secundam quàm tertiæ ad quartam. 15. 5.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

SI fuerint quatuor sinus proportionales in quadrante, maiorq; primus quàm secundum, ac tertius; maior erit ratio anguli respondentis primo sinui ad secundum, quàm tertij ad quartum.

Sint in quadrante cuius centrum A. quatuor sinus FN. EO. DP. CB. proportionales, ac quidem FN. maior quam EO. aut DP. quibus respondeāt arcus FQ. EQ. DQ. CQ. seu anguli FAN. EAO. DAP. CAB. Dico maiorem esse rationem FAN. ad EAO. quàm DAP. Ad CAB. Ad lineā GH. quamcunque fiat angulus HGI. æqualis angulo DAQ. Et ex H. in lineam GI. ducatur perpendicularis HI. Item ad eandem lineam fiat angulus HGK. æqualis angulo CAQ. & demittatur HK. perpendicularis ad GK. Rursus fiat angulus IHL. æqualis angulo NFA. complementi anguli FAN. secetque HI. productam GI. in L. Denique ad H. fiat angulus KHM. æqualis angulo OEA. complementi anguli EAO. secetque recta HM. productam GK. in M. erit reliquus HLI. æqualis ipsi FAN. & HMK. æqualis EAO.



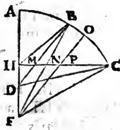
ideoque æquiangula triangula IHL.NFA. & KHM. OEA. ac proinde similia. Cumque æqui angula sint triangula rectangula HIG.DPA.& HKG.CBA. (Nam præter angulos rectos ad K. I. P. B. sumpti sunt anguli æquales HGI. ipsi
32. 1. DAP.& KGK.ipsi CAB.quare & reliqui anguli reliquis sũt
4. 6. æquales) erit vt IH. ad HG. ita PD. ad DA. & vt HG. ad
15. defin. HK. ita DA. id est AC. ad CB. igitur, ex æqualitate, erit vt IH.ad HK.ita DP.ad CB.sed vt DP.ad CB. ita est ex hypothesi FN.ad EO.vt igitur IH.ad HK. ita FN. ad EO. Cùm ergo sit vt HL.ad IH.ita AF.ad FN.& vt IH.ad HK.ita FN. ad EO. & vt KH. ad HM ita EO. ad EA. erit ex æquali vt HL.ad HM.ita AF.ad EA.æquales autem sunt AF.EA. igitur etiam æquales sunt HL.& HM. Cum igitur triangula GHL. GHM. habeant duo latera GH. HL. in eodem verò triangulo inæqualia (nam angulus HLG.ostensus est ęqualis ipsi FAN. & HGL. ipsi DAP. maior autem FAN. quam
19. 1. DAP.igitur in triangulo HLG.maius latus HG.quam latus HL. & quam HM. ipsi HL. æquale) minorque sit angulus compræhẽsus GHL.quàm GHM. (vt paulò post ostendetur)
10.2.huius. maior erit ratio HLG.ad HGL. quam HMG. ad HGM. & permutando maior ratio HLG. ad HMG. quam HGL. ad HGM.sed ipsi HLG.est ęqualis FAN.ipsi HMG. EAO. ipsi HGL. DAP.ipsi HGM.CAB. ergo maior est ratio FAN. ad EAO. quam DAP. ad CAB. seu maior ratio arcus FQ. ad arcum EQ.quam arcus DQ.ad arcum CQ. Quod erat propositum. Quod verò GHL.sit minor quàm GHM. probatur, quia cum angulus IGH. sit maior angulo KGH. erit eius complementum GHI. minus complemento alterius GHK. & cadet perpendicularis HK.supra HI.eritque LHK. angulus pars ipsius LHI.item cum angulus HLI.positus sit maior quàm HMK. erit eius complementum IHL. minus quàm KHM. Quare cum LHK. sit minor quàm LHI. & LHI.minor quàm MHK. multò minor erit LHK. pars ipsius LHI. quàm MHK. Cadet igitur HM.supra HL. ideoque angulus LHG.angulo MHG.minor erit.

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI fuerint quatuor anguli proportionales ſinguli minores recto, ac primus maior ſecundo, ac tertio; maior erit ratio ſecantis primi, ad ſecantem ſecundi, quàm ſecantis tertij, ad ſecantem quarti.

Sint omnia, quæ in 26. theoremate huius, erit FC. ſecans anguli CFA. & PF. ſecans anguli PFA. reſpectu ſinus totius FH. item CD. ſecans anguli CDA. & MD. ſecans anguli MDA. poſito ſinu toto DH. Dico maiorem eſſe rationem CD. ad DM. quam CF. ad PF. Quoniam minor eſt DB. quã DC. eodemq; minor quam FA. id eſt quam FB. aut FC. & æquales ſunt FB. FC. à centro ad circumferentiam, minor erit ratio DB. FB. quam DC. ad FC. & permutando minor DB. ad DC. quam FB. ad FC. Rurſus cum in triangulo FHN. angulus FHN. ſit rectus erit FNH. acutus, & MNB. obtuſus ideoque MB. maior quàm BN. Quare cum minor ſit ratio primę quantitatis DB. ad ſecundam DC. quam tertiæ FB. ad quartam FC. ſitque prima DB. minor tertia FB. ſi ex prima, & tertia demantur ex illa maior MB. ex iſta minor NB. minor erit ratio MD. reſidui primæ quantitatis, ad ſecundum DC. quam NF. reſidui tertiæ quantitatis, ad quartam FC. & conuertendo, maior ratio DC. ad MD. quam FC. ad NF. at vero FC. ad NF. maior eſt quam FC. ad FP. (nam cum in triangulo rectangulo FHN. angulus FNH. ſit acutus, erit FNP. obtuſus, ideoque FPN. acutus, & FP. maior quam FN.) Igitur ratio DC. ad MD. maior eſt quam CF. ad FP. Quod erat &c.



7. 3.

32. 1. & 13. 1.

19. 1.

6. 1. huius.

8. 5.

19. 1.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI ſint quatuor ſecantes proportionales, maiorque prima quam ſecunda, ac tertia; minor erit ratio primi anguli reſpondentis primæ ſecanti ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

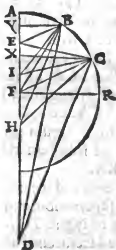
Vide figurã 29. huius. Sint quatuor ſecantes proportionales in quadrante BN. cuius centrũ A. videlicet AV. AT. AS. AR. ſitque AV. maior quàm AT. aut AS. quibus reſpondeant arcus QF. QE. QD. QC. ſeu anguli FAQ. EAQ. DAQ. CAQ. Dico minorem eſſe rationem anguli FAQ. ad angulum EAQ. quàm anguli DAQ. ad angulum CAQ. Ad lineam quamcunque GH. fiat angulus GHI. æqualis angulo FAB. & IHM. æqualis angulo EAQ. & ducatur GIM. perpendicularis ad HI. Hinc fiat angulus GHK. æqualis angulo DAQ. & KHL. æqualis angulo CAQ. & ducatur GKL. perpendicularis ad HK. erunt HG. HM. ſecantes angulorum FAB. EAB. & HG. HL. ſecantes angulorum DAB. CAB. illæ reſpectu ſinus totius HI. iſtæ reſpectu ſinus totius HK. erit igitur vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt GH. ad HL. ita AS. ad AR. cum igitur ſit vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt AV. ad AT. ita ex hypotheſi AS. ad AR. & vt AS. ad AR. ita GH. ad HL. erit vt GH. ad HM. ita GH. ad HL. æquales igitur ſunt HM. HL. ſed & maiores ſunt anguli GHI. IHM. id eſt FAQ. EAQ. angulis GHK. KHL. (nam maioribus ſecantibus maiores reſpondent anguli) maius eſt latus GH. latere HM. (nam anguli IHG. maioris quam IHM. minus eſt complementum HGI. complemẽto HMI. ideoque minus latus HM. latere HG. & HL. quam
19. 1. HG.) Quare cum duo triangula GHM. GHL. habeant duo latera GH. HM. duobus lateribus GH. HL. æqualia vtrumque, vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, anguluſque compræhenſus GHM. maior ſit compræhenſo GHL. ex quibus in oppoſitas baſes perpendiculares demiſſæ ſunt HI.

HK.

HK. erit, per 14. secundi huius, minor ratio anguli GHI. ad angulum IHM. id est FAB. EAB. quam anguli GHK. ad angulum KHL. id est quam DAQ. ad CAQ. Quod erat demonstrandum. 14. 2. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI à puncto in quo semidiameter quadrantis peripheriam secat duo arcus inæquales accipiantur, ad quos, ex quibuslibet punctis eiusdem diametri productæ duæ rectæ ducantur, facientes duos sectores: sectores quos rectæ ductæ ex punctis remotioribus ab extremitate diametri cum arcubus quadrantis efficiunt, minorem habent inter se rationem, quàm quos efficiunt ductæ ex punctis propinquioribus, si maiores cum minoribus comparentur.



Sit Quadrans circuli FAK. cuius centrum F. semidiameter FA. secans peripheriam in A. puncto, a quo sumantur in Quadrante duo arcus maior AC, minor AB. Hinc in diametro AF. producta sumantur quotlibet puncta D. H. extra quadrantem, & I. E. intra quadrantem, ac ducantur tam ex centro, quam ex singulis punctis, duæ rectæ ad puncta B. C. Dico sectorem DCA. ad sectorem DBA. minorem habere rationem,

tionem, quàm ſectorem HCA. ad ſectorem HBA. & hunc minorem, quam ſectorem FCA. ad ſectorem FBA. Denique hunc minorem quam quemlibet ſuperiorem, Superiores autem, eo minorem, quo magis puncta IE à puncto A. remouentur. Ducantur ſinus recti BY. CX. Quoniam triangula DCF. DBF. eandem baſim habent DF erunt
1. 6. inter ſe vt altitudines. CX. BY. Eodem modo cum triangula HCF. HBF. habeant eandem baſim HF. erunt vt eædem altitudines CX. BY. Quare erit vt triangulum DCF. ad triangulum DBF. ita triangulum HCF. ad triangulum HBF. maius autem eſt triangulum DCF triangulo DBF (vt ad finē huius oſtendemus) & triangulo HCF. & ſector FCA. maior ſectore FBA. Quare ſi ad primum triangulum. DCF. & ad tertium HCF. addatur eadem quantitas, nimirum ſector FCA. componētur duo ſectores DCA. HCA. ſi vero ad ſecundum triangulum DBF. & quartum HBF. addatur ſector FBA. conflabuntur ſectores DBA. HBA.
10. 1. hui. Igitur, per decimam propoſitionem primi huius, minor erit ratio ſectoris DCA. ad ſectorem DBA. quam ſectoris HCA. ad ſectorem HBA.

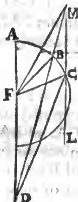
Rurſus, vt prius, oſtendemus eſſe vt triangulum HCF. ad
1. 6. triangulum HBF. ſuper eadem baſi HF. conſtituta, ita al-
corol. 1. titudines CX. BY. At vero ſinus CX. ad ſinum BY. mi-
28. 1. huius. norem habet rationem, quam arcus CA ad arcum BA. id
33. 6. eſt, ſector FCA. ad ſectorem FBA. Igitur minorem habet rationem triangulum HCF. ad triangulum HBF. quam ſector FCA. ad ſectorem FBA. & permutando, ac componendo & iterum permutando, minor erit ratio ſectoris HCA. ad ſectorem HBA. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA.

Præterea cadat punctum I inter F. & A. Eodem modo quo in ſuperioribus partibus, oſtendemus minorem eſſe rationem trianguli FCI. ad triangulum FBI. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. cum igitur maior ſit ratio totius FCA. ad totum FBA. quam partis FCI. ad partem FBI.

reliqui

reliqui sectoris ICA. ad reliquum IBA. maior erit ratio, quam totius FCA. ad totum FBA. 33. 5.

Denique sumpto puncto E inter I. & A. cum ostensum sit sæpe superius, minorem esse rationem trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam sectoris FCA. ad sectorem FBA. & in tertia parte huius demostratum sit, minorem esse rationem sectoris FCA. ad sectorem FBA. quam sectoris ICA. ad sectorem IBA. minor erit ratio trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam sectoris ICA. ad sectorem IBA. Cum igitur maior sit ratio totius sectoris ICA. ad totum sectorem IBA. quam partis ECI. ad partem EBI. erit reliqui sectoris ECA. ad reliquum EBA. maior ratio quam totius ICA. ad totum IBA. Quod erat demonstrandum. Quod autem triangulum DCF. sit maius triangulo DBF. perspicuum est; Ducta enim ipsi AD. parallela LCM. producatur DB. dum concurrat in M. & ducatur FM. perspicuum est quod punctum M. cadet extra circulũ eritq; triangulum DBF pars trianguli DMF ideoque minus, æquale autem est triãgulum DMF triangulo DCF. 38. 1. minus igitur est triangulum FBD. triangulo DCF.



SCHOLIVM.

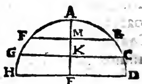
Sectorem hic vocamus, improprio nomine, triangulum ex duobus rectis, & circulari constitutum, qualis est figura DCA. duabus rectis DC. DA. & tertia qualibet circulari AC terminata, eo quod similitudine verum sectorem referat, ab Euclide lib. 3. definitione nona, descriptum, qui angulum rectilineum, aut in centro, aut in peripheria circuli subtendentis constitutum habet; qualis est hic figura LCB, cuius rei lectorem admonitum esse voluimus, ne ὁμωνυμία ambiguitatem pariat.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

SEgmentorum in ſemicirculo, maioris ad minus maior eſt ratio, quam arcus maioris ad minorem.

Sit circulus ABC. cuius centrum E. diameter HD. ac in ſemicirculo HAD. ſumantur duo ſegmenta FAB. GAC. illud minus, hoc maius. Dico maiorem eſſe rationem ſegmenti GAC. ad ſegmentum FAB. quam arcus GAC. ad arcum FAB. Secent duæ chordæ BF. CG. diametrum AF.
22. 2. huius. ad angulos rectam in punctis M. K. & ducatur KB. maior erit ratio ſectoris ſeu figuræ CKA. ad ſectorem BKA. quam ſectoris CEA. ad ſectorem BEA. id eſt quam arcus CA. ad arcum BA. (hoc enim in ſuperiori propoſitione demonſtratum eſt.) ideoq; minor eſt ratio arcus CA. ad BA. quam CKA. ad BKA.
8. 5. minor autem eſt etiam ratio CKA.
15. 5. ad BKA. quam CKA. ad BMA. id eſt quam totius ſegmenti CAG. ad totum ſegmentum BAF. Igitur minor eſt ratio arcus CA. ad arcum BA. id eſt dupli CAG. ad duplum BAF. quam ſegmenti CAG. ad ſegmentum BAF. Eodem modo ducta ſemidiametro HED. oſtendemus minorem eſſe rationem arcus ſemicirculi DAH. ad arcum CAG. quam ſegmenti ſeu ſemicirculi DAH. ad ſegmentum CAG.



THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

IN omni triangulo rectangulo inæqualium laterum lateris minoris ad baſim minor eſt ratio, quam baſis ad vtrumque latus; & maioris lateris

ris ad basim maior est ratio quam basis ad vtrumq; latus.

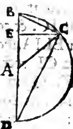
Sit triangulum rectangulum BCD. cuius basis BD. latus minus BC. maius CD. Dico minorem esse rationem CB. ad BD. quam BD. ad vtrumq; BC. CD. & maiorem esse rationem CD. ad BD. quam BD. ad vtrumque CB. CD. Ex angulo recto C. in basim demittatur perpendicularis CE. erit BE. segmentum minus segmento ED. sed & EC. minor est quam ED. (est enim vt BC. minor ad CD. maiorem ita CE. minor ad ED. maiorem) addita ergo communi EB. maior erit tota DB. quam CE. EB. simul. Igitur minor est ratio CB. ad BD. lateris scilicet minoris ad basim, quam CB. ad BE. EC. simul, id est quam basis DB. ad CB. DC. vtrumq; latus simul. Rursus cum maior sit DC. quam CB. id est CE. quam EB. addita communi ED, maiores erunt DE. EC. quam tota DB. Igitur maior est ratio CD. ad BD. lateris scilicet maioris ad basim, quam CD. ad DE. EC. simul id est DB. basis ad DC. CB. vtrumq; latus simul. Quod erit demonstrandum.

Schol. in 4. 47. 1.

8. 6.

8. 5.

8. 6.

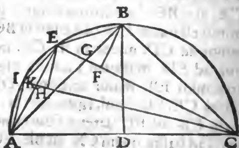


THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

Duarum rectarum, quæ in semicirculo angulum rectum continent maximę sunt quę inter se æquales, inæqualium vero quæ æqualibus viciniores, maiores sunt quam quæ remotiores.

In semicirculo ABC. cuius centrum D. ducta diametro AC. & semidiametro DB. ad eam perpendiculari: Ducātur AB. CB. item AE. EC. & AI. IC. in semicirculo, quarum

illæ primis AB. CB. ſint viciniores, iſtæ remotiores. Cum in triangulis ADB. CDB. duo latera AD. DB. duobus CD. DB. æqualia ſint, & anguli ad D. comprehenſi recti, ideo-
4. 1. que æquales, æquales erunt baſes AB. CB. Dico maiores eſſe AB. CB. ſimul, duabus AE. CE. ſimul & ipſas AE CE. ipſis AI. CI. ſimul eſſe maiores. Ducatur enim perpendicularis BF. in rectam CE. & connectatur BE. EA. ſecetque recta CE. rectam AB. in G. Item ducatur perpendicularis EH. in rectam IC. & connectatur EI. IA. ſecetque recta CI. rectam
32. 1. EA. in K. Quoniam AGC. angulus æqualis eſt duobus interioribꝰ, & oppoſitis GBC.
31. 3. BCG. eſtque GBC.
13. 1. rectus, erit AGC. obtuſus, ac proinde BGC. acutus, cadet
19. 1. igitur BF. perpendicularis inter puncta GC. eſtque BG. ſubtendens rectum angulum F. maior ipſa BF. Iam in triangulo BFE. Quoniam angulus BEC. eſt ſemirectus (inſiſtit e-
20. 3. nim ad circumferentiam quadranti BC.) & angulus ad F.
5. 1. rectus, erit etiam FBE. ſemirectus: æqualia igitur ſunt latera FE. FB. Cum igitur latus CB. ſubtendens rectum F. ſit
19. 1. 4. pron. maius latere CF. ſi æqualia addantur BF. FE. maior erit CB. BF. ſimul quam tota CF. FE. multo igitur maior erit CB. BG. quam CE. cum BG. oſtenſa ſit maior quam BF. Cum vero AG. ſubtendens angulum rectum AEG. ſit maior quam EA. ſubtendente acutum EGA. ſi ad CB. BG. quæ ſunt maiores quã CE. addatur AG. maior, & ad CE. addatur EA. minor erunt CB. BG. GA. id eſt duæ rectæ CB. BA. ſimul maiores duabus rectis CE. EA. Quod erat primo demonſtrandum. Rurſus eodem modo quo ſupra oſtendetur cadere perpendicularẽ EH. inter C. & K. & quod angulus



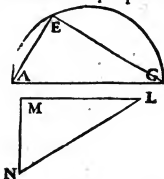
AKC.

AKC. ſit obtuſus, ac proinde EKH. acutus, quare maior erit EK. quam EH. Rurſus in triangulo rectangulo EHI. angulus EIH. ſeu EIC. innixus arcui EC. (qui maior eſt quadrante) eſt maior ſemirecto, minor igitur eſt IEH. ſemirecto 20. 3. 32. 1.
maius igitur eſt latus EH. latere IH. Nunc eadem prorſus 19. 1.
ratione qua ſuperius, oſtendemus, cum CE. ſit maior quam CH. ſubtendens ſcilicet angulum rectum ad H. & maior etiam oſtenſa ſit EH. quam HI. maiores eſſe CE. EH. ſimul quam CH. HI. quare multo maiores erunt CE. EK. ſimul (cum EK. ſit maior quæ EH.) quam CH. HI. ſi igitur 19. 1.
inæqualibus CE. EK. ſimul, & CH. HI. ſimul, addantur inæquales, illis maior KA. ſubtendens angulum rectum 31. 3.
KIA. iſtis minor IA. ſubtendens angulum acutum in eodem triangulo KIA. erunt rectæ CE. EK. KA. id eſt duæ CE. EA. ſimul, tribus CH. HI. IA. ſimul id eſt duabus CI. IA. maiores. Quod quærebamus demonſtrare.

Atque ita deinceps oſtendetur quo linea ex puncto C. ad circumferentiam BA. ducta erit remotior à linea CB. eſſe ſimul cum reliqua ad A. ducta, minorem viciniori, vt CI. IA. minores ſunt quam CE. EA.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXVI.

IN ſemicirculo ex punctis extremis diametri chordas ita inflectere vt habeant proportionem datam.



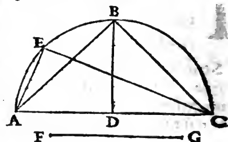
Sit datus ſemicirculus AEC. cuius diameter AC. eiuſque extrema A. C. & proportio data rectæ LM. ad MN. oportet duas chordas ex AC. ita inflectere vt habeant proportionem LM. ad MN. Componatur MN. cum recta ML. in

in angulum rectum & ducatur LN. & fiat vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & aptetur AE. ad circulum AB. connectaturque CE. Dico esse vt LM. ad MN. ita CE. ad EA. Quoniam æqualis est angulus AEC. angulo NML. rectus, recto, in triangulis AEC. NML. & circa angulos EAC. MNL. latera proportionalia, ex hypothesi, est enim vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & quilibet reliquorum angulorum ECA. MLN. minor recto æquales erunt anguli CAE.
7. 6. LNM. sed & æquales sunt recti ad M. & E. igitur æquales
32. 1. 4. 6. sunt reliqui ad C. & L. erit igitur vt LM. ad MN. ita CE. ad EA. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVII.

SI sint duo quadrata alterius quadrati dupla, si quidem sint inter se æqualia, habebunt eorum latera ad istius latus proportionem duplam, si inæqualia habebunt eorum latera ad istius latus minorem proportionem dupla, sed maiorem quam diameter quadrati ad costam.

Sit quadratum FG. ad quod quadrata æqualia AB. BC. simul sumpta habeant proportionem duplam. Inflectantur AB. BC. ad angulum rectum ABC. & ducta AC. diuidatur bifariam in D. & ex D. distantia DA. vel DC. describa-
Schol 31.3. tur circulus AEBC. qui transibit per B. Dico quadratorũ, AB. BC. latera AB. BC. simul sumpta esse dupla lateris FG. Quoniam æqualia sunt AB. CB. & angulus ABC. rectus,



ctus, constat AB. BC. esse latera quadrati, & AC. eius diametrum. Rursus quoniam æqualia sunt quadrata AB. CB. erunt AB. CB. quadrata simul dupla ipsius AB. sed ponuntur etiam dupla ipsius FG. æqualia igitur sunt quadrata FG. AB. & æqualia latera FG. AB. Quoniam verò æqualia sunt quadrata AB. CB. æqualia igitur sunt latera AB. CB. igitur AB. BC. sunt ipsius AB. id est FG. illi æqualis duplicia. 7. Pronunc.

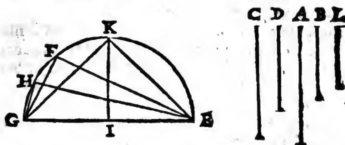
Rursus sint duo quadrata inæqualia AE. EC. illud minus, hoc maius quæ ad idem quadratum FG. habeant rationem duplam Inflectãtur AE. EC. in circulo ita vt habeant proportionem quam latera quadratorum AE. EC. Quoniam æquale est quadratum AC. quadratis AB. BC. & quadratis AE. EC. erunt quadrata AB. BC. & AE. EC. simul æqualia, illa verò sunt dupla quadrati FG. Igitur & ista sunt dupla quadrati FG. datis æqualia, quorum latera AE. EC. cum maiora sint quam AC. diameter quadrati, & minora quam AB. BC. (quæ ad AB. id est FG. habent rationem duplam) vt penultima huius ostensum est; ideo laterum AE. EC. ad latus FG. maior erit ratio, quam diametri quadrati AC. ad costam AB. sed minor quam dupla. Quod probandum erat. Præced. prop. 47. 1. 20. 1. Penult. huius.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVIII.

SI duo quadrata inæqualia simul dupla sint alterius quadrati, & alia duo inæqualia simul etiam dupla eiusdem quadrati, habeat autem ex duobus prioribus quadratis æqualibus latus maioris, ad latus minoris maiorem rationem, quam ex duobus posterioribus latus maioris ad latus minoris; habebunt latera priorum simul ad latus alterius cuius quadrata sunt dupla minorem rationem, quã latera posteriorum simul ad idem quadratum.

Sint

Sint duo quadrata inæqualia A. maius B. minus quæ ſimul ſint dupla quadrati L. Item alia duo C. Maius D. minus ſimul dupla eiuſdem quadrati L. Habeat autē A. quadratum ad B. Quadratum maiorem rationem quam C. quadratum ad quadratum D. Dico latera A. B. ſimul ad latus L. mi-



norem habere rationem, quam latera CD. ſimul ad idem latus L. Deſcribatur ſemicirculus GKE. centro I. ex quo educatur ad angulos rectos ſemidiameter IK. & fiat vt
36. huius. A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad GF. & connectatur EH. EF. Erunt tam quadrata GH. HE. ſimul, quam GF. FE. ſimul dupla quadrati GK. (vt ad 37. huius oſtenſum eſt). Quare vt quadrata A. B. ad quadratum L. ita quadrata GH. HE. ad quadratum GK. & vt quadrata CD. ad idē quadratum L. ita quadrata GF. FE. ad quadratum GK.
22. 6. vt ergo latera A. B. ad latus L. ita latera GH. HE. ad latus GK. atque vt latera CD. ad latus L. ita latera GF. FE. ad latera GK. Cum verò ponatur vt A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad CF. maior autem ſit ratio A. ad B. quam C. ad D. maior erit ratio
10. 5. EG. ad GH. quam EG. ad GF. minor igitur eſt GH. quam
35. huius. GF. ergo minores ſunt GH. HE. ſimul quam GF. FE. ſimul, maior igitur ratio eſt GF. FE. ſimul ad GK. quam GH. HE. ſimul ad GK. quare C. & D. ſimul maiorem rationem habebunt ad L. quam A. B. ſimul ad eandem L.

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

SI prima quantitas ad ſecundam; item tertia ad quartam habeat rationem maiorem data, habebunt compoſitæ antecedentes, ad conſequentes ſimul, rationem maiorem data.

Sit ratio data AB. ad BC. ſit autem maior ratio DE. ad EF. quam AB. ad BC. & maior ratio GH. ad HI. quam AB. ad BC. fiat vt AB. ad BC. ita DE. ad EK. quæ maior erit ipſa EF. Item fiat vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. quæ etiam maior erit quam HI. Dico maiorem eſſe rationem, ipſorum DE. GH. ſimul, ad ipſas EF. HI. ſimul quam AB. ad BC. Quoniam eſt vt DE. ad EK. ita AB. ad BC. & vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. erit ex æqualitate, vt DE. ad EK. ita GH. ad HL. Igitur DE. GH. ſimul ad EK HL. ſimul ſunt vt DE. ad EK. Ablatis igitur ex conſequentibus duabus quantitatibus, partibus FK. IL. maior erit ratio ipſarum DE GH. ſimul ad minores EF. HI. ſimul quam earumdem DE. GH. ſimul ad maiores EK. HL. ſimul: ſed vt DE. GH. ad EK. HL. ita AB. ad BC. maior igitur eſt ratio ipſarum DE. GH. ſimul ad EF. HI. ſimul quam datæ AB. ad datam BC.

10. 5.
22. 5.
8. 5.
Schol. 13. 5.



CORＯLLARIVM. I.

IDem ſequitur ſi quantitates habeant rationem minorem data, nam etiam compoſitæ antecedentes ad conſequentes ſimul habebunt rationem minorem data.

COROLLARIVM II.

Neque hoc tantum in quatuor, sed in quotcumque magnitudinibus demonstratur, semper enim ostendetur compositas antecedentes, ad compositas consequentes habere rationem maiorem, aut minorem data.

Atque in duobus hisce libris vniuersam proportionum inæqualitatem, quæ ad rem nostram facere videbatur, complexi sumus, cuius quidem insignem vsum, non in hoc opere solo, sed in pluribus alijs quæ luci destinamus, vtinam mihi ostendere, tibi intueri, mi lector, tardiora sinant fata.

Sequitur tertius liber, in quo proportiones ferme omnes ad æqualitatem reducuntur, ac materiam continent earum præsertim demonstrationum quæ δεικτικαὶ græcis, nostris ostensiuæ, dicuntur, vt superiores libri ad eas præsertim quæ ad absurdum abducunt, præcipue conferunt. Hunc si perlegeris, forte erit ex quo vtilitatem captas non vulgarem.



VINDICIÆ PRO VERITATE SEV ANTAGONISTICON In C. Mallium Eudoxum.



AD LECTOREM.



NTAGONISTICON hic instruimus, mi Lector, sed innoxium, stylum stringimus, sed incruentum; æmulum aggredimur, non hostem, cuius nomen anagrammatismo inuertimus, cognomen græco pallio induimus, ne, quod minime volumus, famam eius eleuemus, modestia saltem superiores futuri, si non causa. Euomuit ille ante duos annos libellum in quemdam moribus & doctrina præstantissimum Peripateticum, meque longe inferioris tribus Mathematicum; sed illum pluribus iisq; longe turpissimis, me paucioribus minusque propudiosis contumeliis lacessit, ac non sine quadam, in re iniquissima, æquitatis specie excellentiori virtuti sæuius bellum indicit, minorem minus acriter insectatur. Nihilominus illius nomen, in cuius ma-

R xime

xime caput maledictorum tela intentabat, penitus fubticet, me folum nomine, cognomine, patria, ne quæ defint ad cognitionem fymbola, graphicè defignat. Cur tandem? Ego quidem illud metu, hoc contemptu accidiffe fufpicor. Verebatur forte ne fi potentioris nomen contemptius vfurparet humeris linguæ proteruiam, ac oris impuritatem lueret, & à bono quopiam Omnimetra malus Geometra male multaretur; de me autem meoq; ingenio forfan acceperat, nec nocere poffe fi vellem, nec velle fi poffem. Hic ergo omiffis diffidij caufis, quibus fuam caufam infirmari, ac exiftimationem labefactari non nefciebat, Pythagorico fupercilio, ac fola verborum quæ αὐτὸς ἔφα, authoritate, mihi aut infcitiæ aut malignitatis notam inurere conatus eft. Primum non diffiteor neq; dedecori duco; vitium id eft, cuius (fi quod ineft) probrum aut plurimum minuit communio, aut penitus tollit naturæ conditio. Quotusquisq; enim eft eorum qui recte fapiunt qui nefciat, immo qui hoc ipfum fciat fe, ac mortalium plærosque omnes nihil fcire: aut fi quid fciat, quod Mathefi forte acceptum ferre poteft, id vero adeo exiguam effe partem eorum quæ nefciat, vt iam penitus ignarus fit ni vltro concedat fe effe ignarum. Alterum vero conftanter nego, eiusq; caufa aduerfario iniuriarum dicam fcribo: doli mali crimen eft quod affingitur turpe, nefarium: deteftabile; cuius me cum in omni vita immunem fuiffe norunt quot quot me norunt; tum vero eo tempore quo me eius infimulat, dum fimultates mecum exercet Eudoxus, ne fufpicione quidem ac coniectura coarguendum fuiffe fateberis, bone Lector, fi mecum otiofe ac patienter diffidij caufam atq; originem infpexeris, & rem totam à carceribus quod aiunt, ad calcem reuocaris. Atque id quidem ad propofitiones nonam, decimam, aut vndecimam huius, in quibus belli feminarium delitefcit, aperiendum erat, illic claffìcum canendum, & calamus ad iuftam defenfionem armandus erat; fed vt verum fatear, non folum pigebat lectorem ab vtili lectione ad inutile fpectaculum, ac tanquam ab Academia ad Arenam auocare, fed pudebat virum ftudiofum Mirmillonem agere, ac puluerem litterarium iurgiofo atramento fœdare. At vrgeor, vis infertur, quid agam? num digitum tollam, arma fubmittam, ac Salmacide ignauior fpolia concedam fine fudore & fanguine? Confultius hoc forte quidem effet in hoc certaminis genere in quo, vt fapienter Demofthenes, vincit qui vincitur, ac inferior eft, qui fuperior euaferit; idq; omnino agerem, ni eam mihi vitæ conditionem ac veluti ftationem fortuna affignaffet quam tueri fine hominum exiftimatione (quæ bonis viris

fine

sine vita, quam sine ea vita, potior eße debet) nulla ratione poßum. Ea vero impetitur, atq; acriter impugnatur, igitur vindicanda est, ac omni si opus fuerit πανοπλίᾳ defendenda. Humanum est in eos qui humanitatis obliuiscuntur esse inhumanum, ne veterem iniuriam ferendo inuites nouam, ac, quod est in prouerbio, si in ouem degeneres, luporum, aut Lycanthroporum potius in te feritatem prouoces. Neque tamen muliebri impotentia in conuitia prorumpam, aut ex Suburrę fornicibus potius quam ex Stoæ porticibus arma depromam,

Εἶκε ςυγὸς θύγαθερ, πολέμου καὶ δηιοτῆτος
Οὐχ ἅλις ὅττι γυναῖκας ἀνάλκιδας ἠπεροπεύεις;

Sed prætextata veritate stipatus id agam tantum vt suam calumniæ personam detraham, totaq; re tanquam in Areopago candide exposita, iudicio tuo neque verborum lenocinijs corrupto, neq; amplificationum machinis expugnato citra vllam prouocationem stabo. Confido autem adeo liquido auspicio causam hanc à me susceptam, vt vel improbitas ipsa illi vltro candido atq; integro calculo sit suffragatura. Docuit annis superioribus in Patauina Academia Mathesin vir triplici scriptorum, maiorum, morumq; gloria ter Gloriosus. prima vt non infimum ei inter Mathematicos, ita sua æstimatione longe inferius Nomen comparauit. A secunda Cognomen accepit splendidum, splendorem nullum. Tertia Agnomen indidit quod Plautinus Pyrgopolynices, Terentianus Thraso, recentior Scarabombardonides inuidere posset: adeo magnifice de se sentire, ac Tragice loqui dicitur. Audio enim iucundissima fraude quondam sibi ipsi imposuisse qui Mathematici nomen mereretur præter se reperiri neminem, ac vnum se inter mortales qui docendæ Matheseos prouinciam pro dignitate obire valeret: adeo autem alte menti paralogismum illum insedisse vt ne tribus quidem Anticyris elui poßit. Vix credam ita eum credidiße; neque si credidit, consultum vel curatoribus suis duxero eum blandissimo hoc morbo liberare, ne quod ille quondam φρενοβλαβὴς à seruatoribus suis perditum sese exclamet, ac redditæ sanitatis beneficium in maleficij loco ducat. Hoc tamen asseram tunc, ni me opinio fallit, fuiße in viuis Marinum Ghetaldum, Alexandrum Andersonum, Ioannem Neperum, & adhuc superstites eße Christophorum Gruenbergium, Claudium Bachetum, Henricum Briggium, Io. Keplerum, Vuillebrordum Snellium, quos qui Mathematicos nega-

rit, næ ille in alio mundo natus, ac Mathematicum ne pictum quidem aut fictum vnquam vidiſſe videatur. Addo nullum viri iſtius tunc opus extitiße quod palmarium cenſeri, ac dignum cognomini nomen tribuere poſſet. Qui enim extabat de Cometis tractatus ex varijs variorum authorum ſententijs apte concinnatus authori quidem ſuo ornamento erat, hunc tamen centonem qui trabeam dixiſſet, ac inde Mathematicorũ Imperatorem conieciſſet, annon ille Glaucum æſtimandi imperitia ſuperaßet? Quanto illi interuallo, mea quidem ſententia, hac in re præferendus Scipio Claramontius, inſignis & Philoſophus & Mathematicus, qui decumana Tychonis Brahe machinamenta ne gry quidem reformidans, ac contra immanem quæ in omnium animis de nouo illo Athlante inualuerat opinionem ingenij vigore, ac demonſtrationum ope eluctatus, Cometas nouaque aſtra quæ ille parum legitima ἀποθεώσει in cæleſtia corpora retulerat, ac ſtellarum ciuitate donarat, in ordinem redegit, aut ita redegiße viſus eſt, vt de re, quam præcox hominum credulitas indubitatam fecerat, non ſine ratione dubitare poſſis: de qua etiam aliquando, Deo fauente, meum iudicium qualecumq; illud ſit interponam. Sed hæc forte ferenda fuiſſent ni Salmonei temeritate etiam maiorum gentium Deos æmulari, atq; ex inglorio adhuc Mathematico in glorioſum Peripateticum, immo & Peripateticorum ſuperciliosum Ariſtarchum euadere tentaßet. Sed

Dum fulmen Iouis, ac ſonitus imitatur Olympi

iuſto in FORTVNIO, LICET, O *Lector, admodum benigno vltricem audaciæ ſuæ* NEMESIN *expertus eſt. Nam vir doctrina inſignis in Controuerſijs de cometarum quiete, loco Boreali, ac parallaxi Ariſtotelea*

——————denſa inter nubila telum
Torſit (non velut ille faces, ac fumea tædis
Lumina) præcipitemq; immani fulmine adegit.

Prodierunt poſtea in lucem exercitationes Mathematicæ, quæ tum primum ampullas immanes non omnino inanes, ſuumq; authorem non iam Ματαῖον *ſed* Μαθηματικὸν *prodiderunt. Licet enim ſcopis diſſolutis,*

que

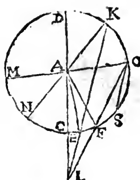
ac emissarijs variorum temporum palmitibus similia nonnullis visa sint quæ ibi promit, neq; ordine connexa, neq; in vnum vnius operis finem conspirantia: ego tamen in tanta collectaneorum frequentia, furtorum licentia, canonum inani copia quibus pleraq; recentiorum Mathematicorum scripta laborant non potui non probare quę iste protulit, & rerum momento vtilia, & varietate iucunda, sed proprietate presertim inuentionis rara, sit enim veritati, quam profiteor, suus locus, noua sunt pleraque licet non omnia, boni ingenij non improbi tantum laboris partus, sui peculij quæstus non alieni raptus. Atq; vtinam illum hac in re imitarentur quos insanus tabularum calculus vexat, quique consuendis in monstrosas vestes priorum authorum scrutis inuigilant, ac denique toti in eo sunt vt Pandectarum sartura Scombris tunicas parent, melius ecquidem rei Mathematicæ consultum esset, neque illa indigestorum operum, ac superuacaneorum voluminum mole laborans tardius ad suum incrementum properaret. Sed de hominis gloria satis; nunc propius ad rem nostram. Cum vir iste in Patauino Gymnasio prima stipendia meruisset, de secundis cum Illustrissimis Academiæ moderatoribus conuenire non potuit, vt qui suæ operæ pretium sua de seipso opinione metiretur. Agunt quidem humanissimi Domini omnia, vt virum quem in pretio habebant retineant, rationes omnes adhibent quibus pertinacem animum subigant, conditiones proponunt æquissimas, sed respuit ille, omnes præter suam, cui ὥσπερ λεπὰς προσίσχεται, ratus fortassis necessitate coactos in eam tandem venturos. Sed læsa obstinatione patientia in iustam indignationem vertitur, abdicatur inscio prouincia, cogitatur de alio, accersor ego Roma, aduolo, stupet ille tanquam fulmine ictus, & qui se vnicam illam auem arbitrabatur miratur quibus ex latebris alia prodierit, statuit tandem vt erat tam aliorum contemptor, quam sui admirator, Phœnicopterum esse, qui verum Phenicem colore tantum ementiatur, aut de genere accipitrum degenerem Cucullum, qui cum proprio careat, alieno in nido parere velit. Hinc metus, ne quem videri volebat fastidire, re autem ipsa maxime appetebat, bolum alius ex faucibus eriperet. Quare in Seplasio (hæc illi curia erat) suorum Senatum cogit, narrat aduenisse fucum qui in aluear non suum inuolare velit: rogat quid agendum vt ignauum pecus à præsepibus arceatur; variant sententiæ, in hanc tandem pedibus itur, quæ etiam consulto sancitur, vt mihi quæstio proponatur ex adytis Matheseos deprompta noua, ἀναπόδεικτος, quam quia soluturus non essem, id enim tanquam ex tripode pronunciabant, ac

futurum

futurum omnino vel sponsionibus certare parati erant, (adeo certo præiudicio hominem cuius doctrinam ignorabant ignorantia damnabant) tum demum Censoria virga notatus publice capite diminuerer, ac in ærarios Matheseos Professores ablegarer; hinc essent qui omnibus neruis contenderent, vt atris Rogatorum calculis cum dedecore in vltimas terras abigerer. Sic in Panegyri illa omnium ordinum consensu statutum de homine ignoto, insonte, indicta causa, qui, ita me Deus adiuuet, eo aduenеram non vt in alienam possessionem inuaderem, sed vt vacuam occuparem, aut potius oblatam à veris Dominis acciperem; cui non magis notum erat Eudoxi nomen quam ἀδοξοτάτου cuiuspiam, quod iampridem elapsa sæcula obliterassent, aut olim ventura nondum prodidissent. Sed heus vos, o Patres in meam proscriptionem Conscripti; Hiccine verus gnomon ac libella qua Mathematicum probetis, aut germanus index quo adulterinum à genuino discernatis? An ignoratis per quos anfractus, ac sinuosas innumerabilium propositionum ambages ad conclusiones in Geometria veluti labyrintho deueniatur, quibus relegendis, sæpe ne centum quidem Ariadnes glomi sufficiant? nescitis demonstrationum Mathematicarum inuentionem sæpe improbo multorum annorum labori, aliquando Fortunæ, nonumquam peculiari Genio atq; ingenio tribuendam, in qua qui Dijs illis non litarit, frustra oleum & operam insumat? Quid si eodem æuo Euclides atque Archimedes vixissent, atque hic problema proposuisset quo parabolæ æquale quadratum inueniendum esset, num ille Mathematicus non fuisset si hoc absoluere non potuisset? Certe si Mathesin ignoratis, ignosco; at si in ea versati estis vereor ne malitiæ crimen (quod mihi postea hic iniuria affinxit) ego vobis iure tribuere possim. Hæc ego tunc; sed iustæ rationes in inanes excusationes trahebantur, risuq; ac cachinnis, ac tantum non sibilis excipiebantur. Cum igitur animaduerterem non doctrinæ periculum fieri, sed famæ periculum creari, porrectoq; veluti calyce obnunciari mihi illud in adagio ἢ πῖθι ἢ ἄπιθι, animum tandem alijs cogitationibus distractum in hanc vnam colligo vt propositæ quæstioni satisfaciam, quod num assecutus fuerim decerne, mi lector, vt enim id præstare possis demonstrationum veritas quæ nullis opinionum nubibus inumbrata intaminatam ex clarissimis fontibus fundit lucem; vt velis, æquitatis studium, veritatis amor, omniq; gratia intemeratus animi candor efficiet. Erat autem huiusmodi Eudoxi manu scripta, vbi literas tantum mutauimus, vt eam ad nostrum schema aptaremus.

Si à

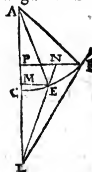
Si à puncto L. protractę diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. quæritur num arcus OK. KD. eandem, vel maiorem, vel minorem habeant proportionem quam angulus OLK. ad angulum KLD. tota exposita apodixi.



Cui ego tribus potissimum propositionibus respondi, quæ sunt huiusmodi.

I.

SI à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem esse rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum BLC. Ducantur sinus recti FP. EM. & LE. producta secet PF. in N. Constat rectam PN. esse maiorem quam ME. Iam si non est maior ratio FC. ad EC, id est anguli FAC. ad EAC. quam anguli FLC. ad ELC. erit vel minor vel æqualis. Sit primum minor, ideoq; maior ratio FLA. ad ELA. quam FAC. ad EAC.



Quoniam FP. est tangens anguli FLP. & NP. tangens anguli NLP. maior erit ratio FP. ad PN. quam FLP. ad NLP. sed FLP. ad NLP. ponitur maior quam FAC. ad EAC. & ratio FAC. ad EAC. maior est quam sinus recti FP. ad

26.1.huius.
corol.1.28. 1.huius.

FP. ad sinum rectum EM. Igitur à primo ad vltimum ma-
13.5. ior erit ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. minor igitur
10.5. est PN. quam ME. Quod est absurdum.

Sed ponatur eadem ratio FAC. ad EAC. quæ FLC. ad
26.1.huius. ELC. quoniam maior est ratio FP. ad PN. quam anguli FLP. ad angulum NLP. ponitur autem vt angulus FLP. ad angulum NLP. ita angulus FAC. ad angulum EAC.
13.6. seu arcus FC. ad arcum EC. sed arcus FC. ad arcum EC.
coroll,1.28. 1.huius. maiorem habet rationem quam sinus FP. ad sinum EM.
13.5. Igitur maior est ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. ideo-
10.5. que minor est PN. quam ME. Quod est absurdum. Igitur cum neq; minor neq; æqualis sit proportio FAC. ad EAC. proportioni FLC. ad ELC. necesse est vt sit maior. Quod erat propositum.

I I.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli rectæ LK. LO. secantes conuexam in E. F. & ex centro rectæ AK. AO. Dico maiorem esse rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. Ductis enim AF. AE. Quoniam permutando maior est ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. ex præcedenti, erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. sed angulis FAL. FLA. simul est æqualis angulus externus
32.1. AFO. id est AOF. & angulis EAL. ELA. simul æqualis
5.1. est angulus externus AEK. id est AKE. Igitur maior est ratio anguli AOF. seu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id est AKL. ad angulum ALK. & permutando maior ratio anguli AOL. ad AKL. quam anguli OLA. ad KLA. Quod erat probandum.

Si à

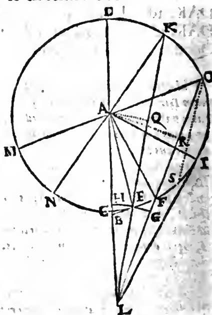
III.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. sintq; eadem quæ prius. Dico angulum OAD. ad angulum KAD. id est arcum OD. ad arcum KD. maiorem habere rationem, quam OLA. ad KLA. Nam cum maior sit ratio AOL. ad ALO. quam AKL. ad ALK. erit componendo maior ratio vtriusque AOL. ALO. simul, id est ipsius DAO. externi illis 32.1. æqualis ad ALO. quam AKL. ALK. simul id est ipsius DAK. ad ALK. & permutando maior ratio DAO. ad DAK. id est arcus DO. ad DK. quam ALO. ad ALK. Quod erat demonstrandum.

Vbi demonstratio successit, eam ego non Eudoxo, me enim ille tanquam Diris deuotum caput auersabatur, sed Hippico (id nominis erat Patri patrato qui oblato prius aduersarij libello, mihi bellum indixerat) eius amico non vulgari in manus dedi, cui pallor in genas momento emicans turbati ex felici successu animi indicium non leue dedit. Hinc rogat quem probè demonstratæ propositionis iudicem esse velim; Non alium, inquam, quam actorem ipsum mihi infensum. Quid si ille te condemnarit? Appellabo typos qui mihi tot Rhadamantos suscitabunt, quot Academiæ Platonicæ ingressu Geometria dignos reddit, qui omnes secundum legem Cornelium de falsis, hominem condemnantes, veris demonstrationum numellis, ac manicis constrictum, ac ignominiæ stigmate inustum, in publico literatorum foro catamidiandum exhibebunt. Sed prouocatione, vt audiui, opus non fuit, ille demonstrationem genuinam agnouit, in qua tamen hoc deesse dicebat, quod non ostenderet, sed ad absurdum deduceret, quæ res apud nonnullos Matheseos imperitos non demonstratæ propositionis instar erat, efficiebatq; vt non minus ignarus haberer, quam si nihil demonstrassem. Hic ego, vt verum fatear, labrum momordi, ac totus in vindictam exarsi. Quid, inquam, numquamne Philothersites iste me vltro vexare, atq; aliam ex alia molestiam nectere desinet? aut forte hic mihi cum Iosepho Scaligero negotium est viro mortalium omnium ἀγεωμετρητοτάτῳ *cui* εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὴ *scopulus, eiusq; vsus violenta in Geometria Tyrannis*

esse videatur? minime vero, prætextam exuit hostis, veteranus est ac inter Triarios non vltimus, quem liuor in pugnam accendit, non inscitia: obuiam igitur eundum, ac toto corpore, omnibusq; vngulis resistendum, pugnandum, vincendum, sed quo pacto? Primum si opinioni, qua plæraque mortalium reguntur, satis fecero; hinc si iisdem armis, quibus me hostis, ego hostem incessero, ac Herculea vltione, quod dedit malum illud ipsum reddidero. Igitur exertis ingenioli quantuliscumq; viribus, aliam ἀπόδειξιν δεικτικὴν *inuenio quæ erat huiusmodi.*

Si à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem esse rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum BLC. Ducatur recta LI. tangens circulum in puncto I. Item per puncta F. E. recta FB. secans AL. in B. (secabit autem cum angulus LAF. recto minor sit, nam cum rectus sit

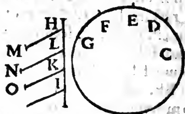


32.1. LIA. erit LAI. ac multo magis eius pars LAF. acutus, & in triangulo Isoscele AFE. angulus ad basim AFE. acutus, quare angulis AFB. FAB. e-
13.pron. 8.5. xistentibus minoribus duobus rectis concurrent AB. FB. ad partes B.) maior erit ratio sectoris AFE. ad triangulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum AEB. sed sector AFE. ad sectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem quam ad triangulum AEB. Igitur sector AFE.
33.6. ad sectorem AEC. id est arcus FE. ad arcum EC. maiorem

rem habet rationem, quam triangulum AFE. ad triangulum AEB. id est quam FE. ad EB. & conuertendo *1. 6.*
minor est ratio arcus CE. ad arcum EF. quam rectę BE. ad rectam EF. Eodem prorsus modo ostendemus maiorem esse rationem sectoris HLE. ad sectorem ELG. id est *33.6.*
arcus HE. ad arcum EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id est quam BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quam arcus HE. ad arcum EG. Cum ergo minor sit proportio arcus CE. ad arcum EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quam arcus HE. ad arcum EG. erit etiam minor ratio arcus CE. ad arcum EF. quam arcus HE. ad arcum EG. id est anguli LAE. ad angulum ELF. & permutando, ac componendo, maior ratio arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum ELC. Quod erat demonstrandum. Hinc eodem modo quo secunda huius Apologiæ ostendebam maiorem esse rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. ac tandem ex tertia eiusdem, maiorem esse rationem arcus OD. ad arcum KD. quam anguli OLA. ad angulum KLA. Quod ab aduersario initio propositum fuerat. *1. 6.*

Hanc demonstrationem per alium internuncium Eudoxo porrigo. Quid dixerit ignoro. Interim ego totus in talionem vertor. Ignoscite superi, hæc ferme prima iniuria fuit quæ patientiam meam deflorauit, & in vindictæ conatum innocentiam meam impulit. Occurrebat quidem fortis animi esse contemnere contemptum, nec suum contumeliæ telum è manibus tutius extorqueri, quam vbi prudentia lacessita obmutescit, sed rationem vicit (nec tamen sine ratione) recentis, vt videbatur, iniuriæ sensus, cuius aculeum pati vel prudentes ac boni viri difficilime possunt. Quare non vt doctrinam eius probarem, sed vt probationis quam in me adhibuerat iniquitatem indicarem, quod ipse ministrarat telum in eum ipsum acuere cœpi, ac quo sphæram, quod aiunt, redderem, sequētem, quæstionem quam potui difficilimam cudi, quam si quid in Mathematicis aduersarius valeret, demonstrari ab eo petij; adiecta etiam luculenta conditione, vt si demonstraret, ei loco controuerso, si ad eum aspiraret, sine controuersia cederem.

In circulo CDE. sumantur quatuor arcus CD. DE. EF. FG. sitque primus minor secundo, hic tertio, & tertius quarto, aut contra; & linea quæcumq; recta HI. ita diuidatur vt rectę IK. KL. LH. eandem rationem habeant quam differentia sinus versi arcus GF. ad differentiam sinus versi arcus FE. & huius differentia ad differentiam sinus versi arcus DE. & sic deinceps, & ductis parallelis IP. KO. LN. HM. possit recta IP. quadratum chordæ arcus GF. & duplum quadrati, aut quadratum sinus versi eiusdem arcus, atq; ita ordine de reliquis. Quæritur num per quatuor puncta P. O. N. M. duci possit linea vnica regularis, & cuiusmodi illa sit.



Hanc vbi accepit primo cessim ire, hinc tergiuersari, ac tandem respondere renuit, causatus proximum discessum: nec immerito vt enim erat Matheseos peritus ęnigma Bęotico difficilius animaduertit, ad quod soluendum nescio quid Oedipo maius requirebatur. Prudenter igitur ire per extentum funem renuit, ne suo lapsu imperitis (nec enim apud iustos rerum æstimatores minoris habendus fuisset) risum moueret. Vt vero recens efferuescebat in æmulum ira (cuius vt verum fatear, virulentiam tempus decoxit) pauca quędam Theoremata Geometrica, quę cum vnico problemate Diophanti ediderat, sed minime vulgaria in manus meas tandem peruenerunt, quæ cœpi diligentius perscrutari, vt nodum si fieri posset, vel in scirpo ipso inuenire possem. Atq; vt Lynceos habet oculos vlciscendi libido, tria occurrerunt quę vibrarem tela, quę si non lethale vulnus inferrent, saltem cutem non sine doloris sensu perstringerent. Primum audieram non absq; Theseo suum illum Achillem, ita enim haberi volebat, laudem sibi comparasse. Secundo animaduerti in Theoremate determinato pagina nona linea 15. consequentiam non recte inferri ex ęquo, vt ipse habet, nempe ex 31. proposit. 5. Sed ex Scholio propor-

tionis

tionis 15. eiusdem quinti, vt intuenti manifestum erit. Deniq; occurrit in eadem propositione eum non omnes casus persecutum fuisse, sed tantum cum linea CD. circulum secat, non cum tangit. Ex illis igitur tribus capitibus hanc propositionem efformaui quam ei transmissi demonstrandam, vt suo quodammodo se gladio iugulare cogeretur. Propositum sit demonstrare Theorema determinatum à C. Mallio Eudoxo non fuisse recte demonstratum: quæ res eum in miram solicitudinem coniecit, cum latentem cuniculum deprehendere non posset. Atq; hęc est malignitas cuius me insimulauit Eudoxus, qui si tam recte animorum παθολογίαν, quam verborum κακολογίαν tenuisset, hanc potius ęquissimum talionem indigetasset, neq; iniuriam à me illatam conquestus, sed iustissime propulsatam confessus fuisset. Caueat autem ne si pergat acriorem iratę

In sese cieat Rhamnusidis iram.

Dum quod eius afflatu factum est Dirarum teterrimę stylo iniquissimo audet ascribere. Sed quid sentiendum, tu dixeris integerrime Lector, quam enim tibi ab initio hac de re, de qua potissimum lis contestata est, cognoscendi, ac pronunciandi potestatem, quod in me fuit, concessi, eandem nunc ratam habeo, iudicio tuo ne tantillum quidem refragaturus. At quęres quid re vera de illis Theorematis sentiam? Aio esse elegantissima, & quę vel sola suum authorem, quisquis ille sit, Geometrarum albo dignum reddere possint: quę vero negligentius aut omissa, aut immutata sunt parum aut nihil de eius laude detrahunt, cum facilime vel à mediocriter in rebus Mathematicis versato restitui possint.

Ridebis, generose Lector, homuuciones tanta contentione pro angusto Academiæ angulo tumultuantes. Recte id quidem, si Alexandrum ac Darium de Asię Imperio Cęsaremq; ac Pompeium de orbis dominatu contendentes riseris. Speciosior illis, non maior dissidij causa fuit? Nam rerùm humanarum magnitudinem non moles sed ęstimatio facit. Tanti mihi Patauinus suggestus quanti Pelleo iuueni, ac perpetuo Dictatori non vnus sed Democriticorum mundorum aceruus. Pro eo si pugnant, pugnamus & nos solo armorum genere, non pugnandi ardore differentes. Illi velitibus, nos prolusionibus prelium accendimus; illi eminus tela, non scommata iacimus; cominus illi hastis, ac gladijs, nos stylis ac calamis congredimur,

gredimur, legiones illi, nos rationes committimus. Vtrisque finis victoria, queque victoriam sequitur gloria, sed nostra eo sæpe maior quod in vnum caput collecta magis elucescat, illa amplissima communione in multa hominum millia dissipata dubio plerumque splendore effulgeat. Nempe sic voluit qui voluntatis nutu omnia condidit, vt non naturalia tantum, sed etiam humana lite & amicitia constarent, illa quidem vt benefica vnione seruarentur, ista ne noxio torpore corrumperentur; vt enim marcet sine aduersario virtus, ita æmulatione lacessita mirum quanta contentione ad egregia facinora feratur.

Tunc bene fortis equus reserato carcere currit,
Cum quos prætereat, quosve sequatur habet.

Testem hanc ipsam exhibeo Academiam, ac infinita præstantissimorum virorum, qui ex ea tanquam exequo prodierunt, opera, que forte eterno pressa gelu, in authorum, tanquam terræ visceribus delituissent, ni ea genialis æmulationis estus in fœcundum germen, ac vberrimos fructus exclusisset. Certe hoc quicquid sit operis tot linearum, triangulorum, circulorum schematismis refertum, non sine sumptibus qui censum meum longe superant, nescio an ego, nescio an antagonista suum editurus fuißet, ni stimulos æmula virtus addidisset. Huic tu has etiam vindicias, non inuidie, non maleuolentiæ ascribe benigne Lector, & Vale.

F I N I S.

CVRVI



CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER TERTIVS.



THEOREMA I. PROPOS. I.



SI fuerit vt prima recta ad ſecundam, ita tertia ad quartam, & aſſumantur quinta & ſexta: erit vt rectangulum ſub prima & quinta, ad rectangulum ſub ſecunda & ſexta, ita rectangulum ſub tertia & quinta, ad rectangulum ſub quarta & ſexta.



Sit vt A. recta ad rectam B. ita recta C. ad rectam D. & aſſumantur duæ quęlibet E. F. Dico rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub F. B. eſſe vt rectangulum ſub E. C. ad rectangulum ſub F. D. Cum enim ſit vt E. ad F. ita E. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. erit ratio compoſita ex E. ad F. & A. ad B. eadem ratio-

ni

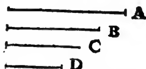
ni compositæ ex E. ad F. & C. ad D. sed ratio compo-
23.6. sita ex ratione E. ad F. & A. ad B. est ratio rectanguli sub E. A. ad rectangulum sub F. B. & ratio composita ex ratione E. ad F. & C. ad D. eadem est quæ rectanguli sub E. C. ad rectangulum sub F. D. Igitur vt rectangulum sub E. A. ad rectangulum sub F. B. ita rectangulum sub E. C. ad rectangulum sub E. D.

Aliter. Cum rectangula sub EA. & sub EC. habeant
1. 6. eandem altitudinem E. erunt vt A. ad C. Rursus cum rectangula sub F. B. & F. D. habeant eandem altitudinem F. erunt vt B. ad D. Quare cum sit vt A. ad C. ita rectangulum sub E. A. ad rectangulum sub E. C. vt autem A. ad C. ita permutando B. ad D. & vt B. ad D. ita rectangulum sub F. B. ad rectangulum sub F. D. erit vt rectan-
Schol.11.5. gulum sub E. A. ad rectangulum sub E. C. ita rectangulum sub F. B. ad rectangulum sub F. D. Quod erat probandum.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita rectangulum sub prima & tertia, ad rectangulum sub secunda & quarta.

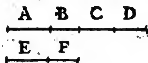
Sint quatuor rectæ A. B. C. D. proportionales. Dico esse vt quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum sub A. C. ad rectangulum sub B. D. Nam cum sit vt A. ad B. ita C. ad D. erit permutando vt A. ad C. ita B. ad D. ideoq; rectangula sub
1. defin.6. A. C. rectangulis sub B. D. similia sunt: similia autem sunt & quadrata A. B. Igitur super duabus primis A. B. constituta sunt



duo

duo rectilinea similia, similiterq; descripta, videlicet quadrata A. B. & super duabus C. & D. itidem duo rectangula C. A. & D. B. similia: vt igitur quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum sub A. C. ad rectangulum sub B. D. 22.6.

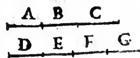
Aliter. Cum sit vt A. ad B. ita C. ad D. assumantur E. quinta, & F. sexta; quarum E. sit æqualis primæ A. & F. secundæ B. erit ex præcedenti propositione, vt rectangulum E. A. id est quadratum A. ad rectangulum F. B. id est quadratum B. ita rectangulum sub E. C. id est, sub A. C. ad rectangulum sub F. D. id est sub B. D. Quod erat demonstrandum. 1.3.huius.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI fuerint tres quantitates quæcumq; priores, & quatuor rectæ lineæ posteriores, fueritque vt prima priorum ad secundam ita prima posteriorum ad secundam; & vt secunda priorum ad tertiam, ita tertia posteriorum ad quartam: erit vt prima priorum ad tertiam, ita rectangulum sub prima & tertia posteriorum, ad rectangulum sub earumdem secunda & quarta.

SIT in prioribus quantitatibus quibuscumque vt A. ad B. ita in posterioribus rectis lineis D. ad E. & vt B. ad C. in prioribus quantitatibus, ita F. ad G. in posterioribus rectis. Dico esse vt A. ad C. ita rectangulum sub D. F. ad rectangulum sub E. G. Quoniam est vt A. ad B. ita D. ad E. & vt B. ad C. ita F. ad G. erit ratio composita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. eadem quæ composita ex rationibus



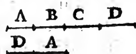
T

rionibus D. ad E. & F. ad G. sed ratio composita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. est ratio A. ad C. & ratio composita
13.6. ex rationibus D. ad E. & F. ad G. est eadem quæ rectanguli sub D. F. ad rectangulum sub E. G. Igitur vt A. ad C. ita rectangulum sub D. F. ad rectangulum sub E.G. Quod demonstrare volebamus.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: rectangulum sub prima & quarta erit medium proportionale inter rectangula sub prima & secunda, & sub tertia & quarta.

SINT Quatuor rectæ proportionales A. B. C. D. nempe vt A. ad B. ita C. ad D. Dico rectangulum sub A. D. esse medio loco proportionale inter rectangulum sub A B. & rectangulum sub C. D. Assumantur duæ infra quatuor datas quarum D. sit æqualis quartæ D.
1.3. huius. & A. æqualis primæ A. erit, ex prima tertij huius, vt rectangulū sub D. A. id est, sub quarta & prima ad rectangulum sub A. B. prima & secunda, ita rectangulum sub D. C. quarta & tertia ad rectangulum sub A. D. primæ & quarta. Quare cum sit vt rectangulum A. D. ad rectangulum AB. ita rectangulum D. C. ad rectangulum A. D. erit conuertendo vt rectangulum A. B. ad rectangulum A. D. ita rectangulum A. D. ad rectangulum D. C. Quod proposueramus demonstrare.

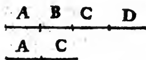


THEO-

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ, ad rectangulum sub secunda & tertia, ita rectangulum sub prima & tertia, ad rectangulum sub quarta & tertia.

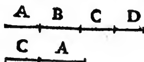
SINT quatuor rectæ ptoportionales: vt A. ad B. ita C. ad D. Dico esse vt quadratum A. ad rectangulum B. C. ita rectangulum A.C. ad rectangulum C.D. Assumantur duæ infra quatuor datas quarum A. sit æqualis primæ A. & C. æqualis tertiæ. C. erit ex prima tertij huius rectangulum sub AA. id est quadratum A. primæ ad rectangulum C. B. sub secunda & tertia; ita rectangulum A. C. sub prima & tertia, ad rectangulum C. D. sub tertia & quarta. Quod est propositum. 1.3.huius.



THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI fuerint quatuor rectæ proporrionales: erit vt rectangulum sub prima & tertia, ad rectangulum sub prima & secunda, ita quadratum tertiæ ad rectangulum sub prima & quarta.

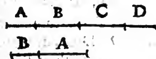
SIT vt A. prima ad B. secundam ita C. tertia, ad D. quartam. Dico esse vt rectangulum A. C. ad rectangulum A. B. ita quadratum. C. ad rectangulũ A. D. Assumantur C. A. æquales tertiæ & primæ. Erit ex 1. 3. huius rectangulum A. C. sub prima & tertia, ad rectangulum A. B. sub prima & secunda, vt rectangulum C. C. id est quadratum. C. tertiæ, ad rectangulum A. D. sub prima & quarta. 1.3.huius.



SCHOLIVM.

Ex eodem principio possent demonstrari propositiones 16. & 17. lib. 6. elementorum, nempe si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Sit enim vt A. ad B. ita C. ad D. & assumantur B. A. secunda & prima æquales: Erit vt rectangulum B. A. sub prima & secunda; ad rectangulum A. B. sub secunda ex prima ita rectangulum B. C. sub secunda & tertia, ad rectangulum A. D. sub prima & quarta: æqualia autem sunt rectangula BA. & AB. Igitur etiam æqualia sunt rectangula B. C. & A. D.

1.3.huius.



Quod si intermedia B. C. æquales ponantur, eodem modo ostendemus rectangulum A. D. rectangulo B. C. id est quadrato B. vel C. esse æquale.

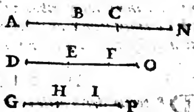
THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI sint quotlibet magnitudinum series quotlibet magnitudines continentes singulæ in qualibet proportione Arithmetica continua; erunt & compositæ primæ cum primis, secundæ cum secundis, & sic deinceps, in continua proportione Arithmetica.

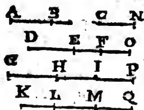
SINT quotlibet series magnitudinum quarum prima contineat primum tres magnitudines AB. DE. GH. secunda magnitudines BC. EF. HI. tertia magnitudines CN. FO. IP. habeantque AB. DE. GH. rationem Arithmeticam, vt & aliæ series. Dico quod etiam compositæ primæ AB. BC. CN. & secundæ DE. EI. IB. & tertiæ GH. HI. IP. habent

ratio-

rationem Arithmeticam. Quoniam tres magnitudines AB. DE. GH. sunt in proportionalitate Arithmetica, erunt AB. GH. duplo ipsius DE. æquales (vt ostendemus in sequenti Scholio) item BC. HI. simul duplæ erunt ipsius EI. & CN. IP. ipsius FO. Igitur omnes simul AB. GH. BC. HI. CN. IP. id est tota AN. & tota GP. erunt simul duplæ omnium DE. EF. FO. id est toti DO. Igitur in ratione Arithmetica sunt AN. DO. GP. vt sequenti Scholio probabimus. 1. 5.



Sed contineat quælibet series magnitudines plures tribus vt prima contineat magnitudines AB. DE. GH. KL. secunda magnitudines BC. EF. HI. LM. tertia magnitudines CN. FO. IP. MQ. Habeantque AB. DE. GH. KL. rationem Arithmeticam continuam, vt & aliæ series, singulæ eandem, aut peculiarem. Probabimus ex prima parte huius propositionis, tres AN. DO. GP. esse in proportionalitate Arithmetica. Rursus ex eadem ostendemus, tres magnitudines DO. GP. KQ. esse in ratione Arithmetica. Igitur ex definitione, ipsarum AN. DO. & DO. GP. eadem est differentia. Item ipsarum DO. GP. & GP. KQ. eadem est differentia: Quare æquales sunt differentiæ magnitudinum AN. DO. GP. KQ. Sunt igitur in continua ratione Arithmetica. Quod erat demonstrandum. 1. pronunc.



SCHOLIVM.

Quod vero duæ magnitudines AB. GH. sint duplæ ipsius DE. & reliqua quæ in propositione supponuntur vera sint,

ſint, demonſtrauit præ cæteris luculentiſſime Claudius Gaſpar Bachetus, vir non in mathematicis ſolum, ſed in omni genere literaturæ vel antiquis conferendus in abſolutiſſimis commentarijs quæ in Diophantum edidit, cuius aliquot propoſitiones quia in noſtris operibus vſuuenient, a numeris ad quamlibet quantitatem transferemus, vt ijs conſulamus quibus forte nobiliſſimus hic author non innotuit.

DEFINITIO.

PRoportio Arithmetica eſt cum in tribus aut quatuor ſeu numeris ſeu magnitudinibus eiuſdem generis, eadem (aut nulla) eſt differentia primæ, & ſecundæ, quæ ſecundæ & tertiæ; aut quæ tertiæ & quartæ: ita tamen vt ſi prima cum ſecunda comparetur ac ſecunda cum tertia, aut tertia cum quarta ſingulæ ſingulis vel æquales vel maiores vel minores exiſtant. Eadem vero proportio ſi in tribus terminis cõſiſtat μεσότης ſeu medietas ac anologia; ſi in quatuor analogia tantum ac proportionalitas Arithmetica dicitur. Quod vero id nominis non tantum quantitati diſcretæ, ſed etiam continuæ tribui poſſit, authorem habemus præter alios luculentum Pappum Alexandrinũ qui libro 3. collect. mathem. illud in quantitate continua paſſim vſurpauit.

I.

SI fuerit eodem differentia primæ magnitudinis ad ſecundam quæ tertiæ ad quartam, ſeu; ſi fuerint quatuor magnitudines Arithmeticè proportionales; ſumma ex extremis conflata erit mediarum ſummæ æqualis: & ſi extrema ſimul ſumpta fuerint æqualia medijs ſimul ſumptis, erunt dictæ magnitudines Arithmetice proportionales.

SINT

SINT quatuor magnitudines AB.CD.EF.GH. sitque eadem differentia AB. & CD. quæ EF. & GH. (quod est esse Arithmeticè proportionales) Dico duas AB. GH. simul duabus CD. EF. esse æquales.

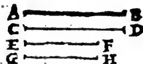
Sit primum AB. ipsi CD. æqualis, cum nulla sit differentia inter AB.& CD.etiam nulla erit inter EF. GH. ex superiori definitione, æquales igitur sunt EF. GH. Si igitur æqualibus AB. CD.addantur æquales EF.GH. nempe GH. ipsi AB. & EF. ipsi CD. erunt AB.GH. simul æquales ipsis CD. EF. simul. Quod primo probandum erat.

Sit secundo maior AB. quam CD.quorum differentia sit IB. & duarum EF.GH.differentia sit KF.manifestum est AI. CD. esse æquales cum ab ijs pars IB.qua differunt sublata sit: Item EK. GH.ob eandem rationem sunt æquales: æquales autem etiam sunt IB. KF. ex hypothesi. Igitur ex prima parte huius erunt duæ AI. GH. duobus CD. EH. æquales, quibus si addantur æquales IB. KF. erit tota AB. cum GH. æqualis toti EF. cum CD. Quod secundo loco erat ostendendum.

Tandem inuertatur ordo magnitudinum; ita vt prima sit GH. secunda EF. tertia CD. vltima AD. eodem prorsus demonstrandi modo ostendemus duas GH. AB. duabus EF. CD. esse æquales.

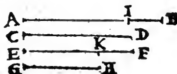
Sed sint duæ magnitudines AB. GH. ipsis CD. EF. æquales. Dico, differentiam AB. & CD. esse eandem differentiæ

ferentiæ EF. & GH. seu quatuor AB. CD. EF. GH. esse Arithmetice proportionales. Sint rursus primo æquales AB. & CD. Quoniam æquales sunt AB. GH. ipsis CD.



EF. si æquales auferantur AB. & CD. remanebunt æquales EF. GH. nulla igitur est differentia inter EF. GH. sed & nulla est inter AB. CD. Igitur ex superiori definitione Arithmetice proportionales sunt AB. CD. & EF. GH.

Sit vero maior magnitudo AB. magnitudine CD. excessu IB. & sint æquales AB. GH. simul ipsis CD. EF. simul: erunt igitur AI. CD. sublata differentia IB. æquales. Quare, si ex aggregatis AB. GH. & CD. EF. quæ supponuntur æqualia, auferantur æquales, illinc AI. hinc CD. remanebunt IB. GH. ipsi EF. æquales. Rursus detracta EK. æquali ipsi GH. ita vt supersit KF. si



ex æqualibus IB. GH. & EF. auferantur æquales EK. GH. remanent IB. KF. æquales, est autem KF. differentia ipsarũ EF. GH. Igitur IB. differentia primæ, & secundæ, æqualis est ipsi KF. differentiæ tertiæ & quartæ, sunt ergo, ex definitione præcedenti AB. CD. EF. GH. Arithmetice proportionales.

Sed sit minor prima magnitudo GH. quam secunda EF. excessu KF. & sint æquales GH. AB. ipsis EF. CD. erunt igitur GH. EK. æquales. Quare si ex aggregatis æqualibus GH. AB. & EF. CD. auferantur æquales illinc GH. hinc EK. remanebunt KF. & CD. ipsi AB. æquales. Iterum sumpta AI. æquali ipsi CD. erit IB. differentia ipsarum CD. AB. Quare si ab æqualibus KF. CD. & AB. auferantur æquales, illinc CD. hinc AI. remanebunt, vt prius, differentiæ KF. IB. æquales, ideoque erunt prædictæ quatuor magnitudines Arithmetice proportionales. Quod erat vltimo loco demonstrandum.

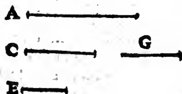
Si

II.

SI fuerint tres magnitudines in medietate Arithmetica: erit prima cum tertia dupla secundæ. Et si prima cum tertia fuerit dupla secundæ, erunt tres magnitudines in medietate Arithmetica.

SINT tres magnitudines A. C. E. in medietate Arithmetica. Dico duas A. E. ipsius C. esse duplas. Accipiatur G. æqualis ipsi. C. Erit ipsarum A. C. & C. E. eadem differentia, sed ipsarum CE. & G.E. etiam eadem est differentia; ergo ipsarum A. C. & ipsarum G. E. est eadem differentia. Igitur per præcedentem duæ A. E. simul duabus C. G. simul sunt æquales: sed C. G. simul sunt duplæ ipsius C. cum inuicem sint æquales C. & G. ergo A. E. ipsius C. sunt duplæ. Quod efficere primo loco volebamus.

ex definit. superiori.



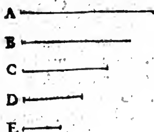
Sed sint A. E. duplæ ipsius. C. Dico tres magnitudines A. C. E. esse in medietate Arithmetica. Sumpta enim rursus G. æquali ipsi. C. Cum A. E. sint duplæ ipsius. C. erunt duabus C. G. æquales. Igitur per præcedentem, erunt quatuor A. C. G. E. id est A. C. C. E. in proportione Arithmetica, ideoque A. C. E. in medietate Arithmetica. Quod secundo loco probandum fuerat.

Priorem patrem huius propositionis aliter demonstrat Clauius Schol. in 17. 6. propositione 1.

III.

SI sint quodlibet magnitudines in proportione Arithmetica continua; extremæ simul sumptæ æquales sunt duabus ab extremis æqualiter remotis, & duplo mediæ in multitudine magnitudinum impari.

Sint quotlibet magnitudines A.B.C.D.E. multitudine impares æqualiter differentes, seu in proportionalitate Arithmetica continua. Dico extremas A.E. esse æquales ipsis B.D. quæ ab extremis æqualiter remouentur & tam A.E. simul quam B.D. simul, esse duplas ipsius C. Nam cum sese æquali excessu superent A.B. & D.E. ex hypothesi & definitione, erunt A.E. ipsis B.D. æquales, per primam huius Scholij: & quia B.C.D. sunt Arithmeticè proportionales, etiam ex hypothesi, erunt B.D. ipsius C. duplæ, per secundam huius Scholij. Sed duabus B.D. æquales sunt duæ A.E. Duplæ igitur sunt duæ A.E. mediæ. C. Quæ omnia erant demonstranda.



IV.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, etiam conuertendo erunt Arithmeticè proportionales.

SI enim quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, aut superabunt prima secundam & tertia quartam eodem excessu, aut ab ijs deficient, aut prima, & secunda, item secunda & tertia erunt æquales. Si prima superet se-

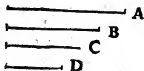
ſecundam eodem exceſſu quo tertia quartam, ſecunda eodem defectu deficiet a prima quo quarta a tertia, eadem enim eſt differentia qua minor a maiori deficit, & qua maior minorem ſuperat. Igitur ex definitione huius Scholij, ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam eandem habent ratione Arithmeticam. Si prima eodem defectu deficiat a ſecunda quo tertia a quarta, ſecunda eodem exceſſu ſuperat primam, quo quarta tertiam. Atque ita rurſus habebunt ſecunda ad primã, & quarta ad tertiã proportionem Arithmeticam. Denique ſi prima & ſecunda, item tertia & quarta ſint æquales, conſtat nullam eſſe differentiam inter ſecundã & primam, item nullam inter quartam & tertiam: Quare ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam habebunt proportionalitatem Arithmeticam, ex eadem definitione. Quod erat demonſtrandum.

V.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, & viciſſim erunt proportionales.

Hæc propoſitio demonſtratur a Federico Commandino, & Chriſtophoro Clauio Lemm. in 80. propoſit. lib. 10. elementorum: ſed breuius hoc modo.

SINT quatuor magnitudines A. B. C. D. Arithmeticè proportionales. Dico quod permutando A. ad. C. & B. ad D. habent rationem Arithmeticam. Nã quoniam A. B. C. D. ſunt in ratione Arithmetica, erunt per primam partem primæ huius Scholij, extremæ A. D. medijs B. C. æquales. Rurſus ſtatuantur eędem magnitudines ordine permutato



mutato A. C. B. D. erunt eędem extremæ A. D. ijsdem medijs C.B. æquales. Igitur per secundam partem primæ propositionis huius Scholij erunt A. C. B. D. in ratione Arithmetica. Quod erat probandum.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI sint quotcumque magnitudines & aliæ ipsis ęquales numero quæ binę in eadem ratione Arithmetica sumantur, & ex æqualitate in eadem ratione Arithmetica existent.

SINT primum tres magnitudines AD.EG.HT.& aliæ tres IN. OQ. RS. sintque AD. EG. & IN. OQ. in ratione Arithmetica. Item EG. HT. & OQ. RS. sint in ratione Arithmetica. Dico quoque ex æqualitate AD. HT. & IN. RS. esse in ratione Arithmetica. Sit primæ AD. & secundæ EG. differentia DC. Item secundæ EG. & tertiæ HT. differentia GF. cui accipiatur æqualis CB. erunt HT. & EF. æquales; item EG. & AC. æquales erunt, ex quibus si demantur æquales GF. CB. remanebunt BA. EF. id est HT. æquales. Differentia igitur ipsarum AD. & HT. est pars BD.



Eodem modo in secundis magnitudinibus si sit primæ IN. & secundæ OQ. differentia MN. item secundæ OQ. & tertiæ RS. differentia PQ. cui æqualis sumatur ML. erit tota NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. Cum igitur AD. EG.& IN.OQ. sint in proportionalitate Arithmetica, erunt ex definitione differentiæ CD. MN. æquales. Item quia EG.

EG. HT. & OQ. RS. sunt in ratione Arithmetica erunt differentiæ FG. PQ. æquales: ipsi autem FG. est æqualis CB. & ipsi PQ. æqualis LM. Si igitur æqualibus DC. MN. æquales addantur CB. ML. erunt totæ DB. NL. æquales; est autem ostensa DB. differentia primæ AD. & tertiæ HT. & NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. in secundis magnitudibus. Igitur AD. HT. & IN. RS. habentes æquales differentias DB. NL. ex definitione sunt in ratione Arithmetica.

Sed sint plures magnitudines tribus, ita vt sint etiam HT. & V. & RS. X. in proportione Arithmetica. Dico adhuc AD. V. & IN. X. esse in ratione Arithmetica. Ipsarum enim HT. V. differentia sit YT. cui æquales sumantur FZ. BK. & ipsarum RS. X. differentia sit r S. cui æquales sumantur P Δ. L Λ. Eodem modo quo in prima parte huius propositionis probabimus DK. & N Λ. esse differentias ipsarum AD. V. & IN. X. easdemque esse inter se æquales. Igitur AD. V. & IN. X. erunt in ratione Arithmetica. Quod demonstratum esse volebamus.

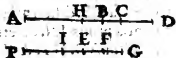
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI sint quotcumque magnitudines in ratione Arithmetica, & totidem aliæ sumantur quæ eandem cum illis proportionem Geometricam habeant, singulæ singulis: habebunt etiam posteriores rationem Arithmeticam.

SINT tres magnitudines DA. CA. BA. in ratione Arithmetica & vt DA. ad CA. ita GP. ad FP. & vt CA. ad BA. ita FP. ad EP. Dico etiam GP. FP. EP. esse Arithmetice proportionales. Cum enim sit ex hypothesi vt DA. ad AC. ita GP. ad PF. erit diuidendo vt DC. ad CA. ita GF. ad FP. Rursus cum sit vt CA. ad AB. ex hypothesi ita FP. ad PE. erit per conuersionem rationis vt CA. ad CB. ita FP. ad FE.

Quare

Quare ex æqualitate, erit vt DC. ad CB. ita GF. ad FE. Sed CD. CB. sunt differentiæ triũ quantitatum AD. AC. AB. videlicet CD. ipsarum AD. AC. & BC. ipsarum AC. AB. habentium rationem Arithmeticam ex hypothesi: æquales igitur sunt DC. CB. ex definitione, æquales igitur etiam GF. FE. eandem cum illis rationem habentes: Sed etiam FG. FE. sunt differentiæ trium magnitudinum PG. PF. PE. nimirum FG. ipsarum PG. PF. & EF. ipsarum PF. PE. Igitur etiam tres magnitudines PG. PF. PE. sunt in ratione Arithmetica.



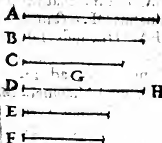
Sint vero plures magnitudines tribus AD. AC. AB. AH. in ratione Arithmetica & sit præterea vt BA. ad HA. ita EP. ad IP. Dico etiam GP, FP. EP. IP. habere rationem Arithmeticam. Nam cum sint tres magnitudines CA. BA. HA. in ratione Arithmetica quibus Geometrice proportionales sunt tres FP. EP. IP. constat ex prima parte huius propositionis differentias HB. BC. tum inter se tum differentijs IE. EF. esse æquales, æquales autem sunt BC. CD. & EF. FG. ex prima parte huius. Quare tres differentiæ IE. EF. FG. æquales sunt, ideoque quatuor quantitates GP. FP. EP. IP. rationem Arithmeticam habent. Quod erat, &c.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI primæ quantitatis ad secundam ratio componatur ex ratione tertię ad quartam; & quintę ad sextam: erit vt prima ad secundam, ita tertia ad aliam ad quam quarta eandem rationem habeat quam quinta ad sextam.

THEO-

Sit ratio A. primæ ad B. secundam composita ex rationibus C. tertiæ ad DH. quartam, & E. quintæ ad F. sextam. Fiat vt E. ad F. ita DH. ad aliã quampiam DG. Dico esse vt A. ad B. ita C. ad DG. Ratio enim A. ad B. composita est ex ratione C. ad DH. & E. ad F. sed vt E. ad F. ita C. ad DG. ex hypotesi, ergo ratio A. ad B. componitur ex ratione C. ad DH. & DH. ad DG. Ergo, vt A. ad B. ita C. ad DG. Quod demonstra- oportuit.



COROLLARIVM.

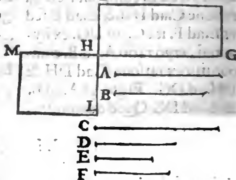
Constat etiam, positis quæ in propositionr, esse vt primam ad secundam ita quintam ad aliam ad quam sit sexta vt tertia ad quartam. Nam quoniam ratio A. ad B. composita est ex rationibus C. ad DH. & E. ad F. erit sine discrimine composita ex rationibus E. ad F. & C. ad DH. eritque E. tertia quantitas, & F. quarta C. quinta DH. sexta habetque DH. sexta ad DG. eandem rationem quam E. tertia ad F. quartam. Est autem ostensum esse vt A. ad B. ita C. ad DG. Igitur vt prima A. ad secundam B. ita quinta C. ad DG. ad quam DH. sexta ita se habet vt E. tertia ad quartam F.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI primæ quantitatis ad secundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam: eiusdem primæ ad secundam ratio componetur ex ratione tertiç ad sextam, & quintæ ad quartam.

Sit

Sit ratio primæ quantitatis A.ad ſecundam B. compoſita ex ratione tertiæ C.ad quartam D. & quintæ E. ad ſextam F.ſintque ordine vt ſex datæ magnitudines inter ſe,ita lineę A.B.C.D.E.F. Fiat ex duabus C.E.rectangulum GHI.& ex duabus DF. rectangulum LHM.ita vt GH.HI.ipſis C.E. & HM. HL. ipſis DF.
23. 6. ſint æquales erit ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM.compoſita ex rationibus GH. ad HM. id eſt C. ad D. & IH. ad HL. id eſt E. ad F. Sed etiam ratio A. ad B. compoſita eſt ex ijſdem rationibus C. ad D. & E. ad F.eadem igitur eſt ratio A. ad B.



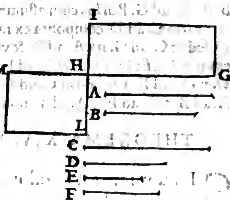
rationi rectanguli GI. ad rectangulum LM. at vero ratio re-
23. 6. ctanguli GI. ad rectangulum LM. etiam componitur ex ratione GH. ad HL. id eſt. C. ad F. & IH. ad HM. id eſt E.ad D. Igitur etiam ratio A. ad B.componitur ex rationibus C. ad F.& E. ad D. Vt autem lineæ A.B.C.D.E.F. ita ponuntur magnitudines A.B.C.D.E.F. Igitur magnitudinum A. B.ratio componitur ex rationibus magnitudinum C. F. & D.E. Quod intendebamus probare.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam,& quintæ ad ſextam : etiam conuertendo ratio ſecundæ ad primam componetur ex ratione ſextæ ad quintam,& quartæ ad tertiam.

Sint

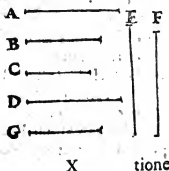
Sint omnia quæ superiori propositione. Dico rationem B. ad A. componi ex rationibus F. ad E. & D. ad C. Erit enim conuertendo vt rectangulum LM. ad rectangulũ GI. ita B. ad A. est autem ratio rectanguli LM. ad rectangulum GI. composita ex rationibus MH. ad HG. id est D. ad C. & LH. composita ex rationibus MH. ad HG. id est D. ad C. & LH. ad HI. id est F. ad E. Igitur B. ad A. ratio composita est ex rationibus D. ad C. & F. ad E. Quod erat demonstrandum. 23. 6.



THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI primæ quantitatis ad secundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam; etiam ratio tertiæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad secundam, & sextæ ad quintam.

HABEAT A. prima ad B. secundam rationem compositam ex rationibus. C. tertiæ ad D. quartam, & E. quintæ ad F. sextam. Dico rationem C. ad D. componi ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Fiat enim vt E. ad F. ita D. ad G. Cum proportio A. ad B. sit composita ex ratione C. ad D. & E. ad F. id est D. ad G. proportio autem composita ex ra-



X tione

tione C. ad D. & D. ad G. eadem est quæ C. ad G. (Nam totum suis partibus simul sumptis æquale est) erit vt A. ad B. ita C. ad G. Rursus cum assumpta sit inter C. D. tertia G.
Schol. in defin. 5. 6. erit ratio C. ad D. composita ex rationibus C. ad G. & G. ad D. sed vt C. ad G. ita A. ad B. & vt G. ad D. ita F. ad E. (cum enim posita sit D. ad G. vt E. ad F. erit conuertendo vt G. ad D. ita F. ad E.) erit ratio C. ad D. composita ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Quod demonstrare oportuit.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad secundam, & tertiæ ad quartam, rectangula sub prima & tertia, & sub secunda & quarta, erunt datis rectangulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad secundam B. & C. tertiæ ad quartam D. fiatque rectangulum GI. sub rectis GH. HI. æqualibus primæ A. & tertiæ C. & rectangulum LM. sub rectis HM. HL. æqualibus secundæ B. & quartæ D. Dico rectangula GI. LM. ipsis E. F. esse proportionalia. Rectangula
23. 6. enim GI. LM. habent rationem compositam, ex ratione laterum GH. HM. id est A. B. & ratione laterum IH. HL. id est C. D. sed etiam rectangula E. F. habent rationem compositam ex rationibus A. ad B. & C. ad D. igitur ratio rectanguli E ad rectangulum F. composita ex ijsdem rationibus ex quibus ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM. eadem est

est quæ rectanguli GI. ad rectangulum LM. Quod probandum susceperamus.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad quartam, & tertiæ ad secundam: rectangula sub prima & tertia, & sub secunda & quarta erunt datis rectaugulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad D. quartam, & C. tertiæ ad B. secundam, fiatque rectangulum GHI. sub rectis GH. HI. quæ primæ A. & tertiæ C. sint æquales, & rectangulum LHM. sub rectis LH. HM. quæ B. secundæ & D. quartæ sint æquales. Dico rectangula GI. LM. rectangulis E. F. esse proportionalia. Rectangula enim GI. LM. habent rationem compositam ex ratione GH. ad HL. id est A. ad D. & ex ratione IH. ad HM. id est C. ad B. sed etiam rectangula E. F. ponuntur habere rationem compositam ex rationibus A. ad D. & C. ad B. Eadem igitur est ratio rectangulorum GI. LM. & rectangulorum E. F. Quod à nobis probandum fuerat. 23. 6.

SCHOLIVM.

PTolemæus lib. 1. magnæ constructionis capite, apud Theonē, & Trapezuntium 12. apud Rainholdum undecimo, regulam, quam vocant sex quantitatum, ingeniose admodum, ut reliqua omnia, excogitauit; quæ non solum in demonstrationibus sphæricis, sed etiam Geometricis magnum momentum obtinere potest; ut ex sequentibus patebit. Cum tamen harum quantitatum plures connexiones siue coniugationes esse possint, ipse ultra duas progressus non est, quarum alteram vocat κατὰ σύνθεσιν seu secundum compositionem, alteram κατὰ διαίρεσιν

 id est,

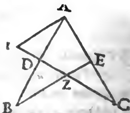
id est, secundum diuisionem. Prima πρότασις *huiusmodi est apud Theonem, ex versione Io. Baptistæ Porta, vt quidem reor non admodum bonam;*

Si in duas rectas finitas angulum continentes, ab extremis producantur duæ rectæ secantes se inuicem, & quæ angulum continent, ratio vnius rectarum, quæ à principio angulum continent, ad ipsam quæ intercipitur ad angulum a producta, coniuncta est, siue componitur, & ex ratione productæ ab extremo dictæ rectæ, & interceptæ ipsius excessus alterius productæ, ad alteram rectam continentium angulum, & præterea ratione interceptæ, & a sectione productarum ad terminum alterius angulum continentium, & ipsius productæ.

Sed breuius, & clarius Regiomontanus Epitomatis lib. 3. propositione nona.

Si a terminis duarum linearum ab angulo aliquo descendentium, duæ lineæ sese secantes, super descendentes mutuo reflexæ fuerint: erit lineæ descendentis ad partem suam superiorem proportio, ex duabus proportionibus, quarum vna est a termino huius descendentis reflexæ, ad partem eius supra sectionem, alia est partis infra sectionem alterius reflexæ, ad totam eandem reflexam composita.

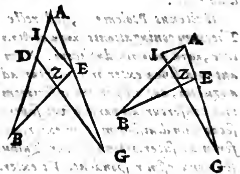
Ἔκθεσιν *ac* διορισμὸν *habent Ptolemeus, & Theon quæ intelligi non possunt sine oculari inspectione diagrammatis, magis ad amussim Regiomontanus. Ab angulo A. descendāt duæ lineæ AB. AG: à terminis earum B.G. quæ reflectantur mutuo super descendentes, quæ sint BE. GD. secantes se in Z. Dico quod proportio GA. ad AE. composita est ex duabus, scilicet proportione GD. ad DZ. & proportione ZB. ad BE.*



Κατασκευὴ *&* ἀπόδειξις *est Ptolomei, ex versione Rainholdi. Ducatur per punctum E. linea EI. æquidistans lineæ GD. Quoniam igitur lineæ GD. EI. sunt æquidistantes, ratio lineæ*
4. 6. *GA. ad AE. eadem est quæ lineæ GD. ad lineam EI. Assumatur*

tur

tur autem deforis linea ZD. Erit igitur composita ratio lineæ GD. ad lineam EI. ex ratione GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ DZ. ad lineam EI. Quare & ratio lineæ GA. ad lineam AE. composita est ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ DZ. ad lineam EI. Est autem & ratio



lineæ DZ. ad EI. eadem rationi lineæ ZB. ad lineam BE. cum æquidistantes sint lineæ EI. & ZD. Ratio igitur lineæ GA. ad lineam AE. composita ex est ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ ZB. ad lineam BE. Quod erat demonstrandum. 4. 6.

Eodem modo demonstrabitur quod & secundum diuisionem ratio lineæ GE. ad lineam EA. composita est ex ratione lineæ GZ. ad ZD. & ex ratione lineæ DB. ad BA. Ducta per A. punctum linea AI. æquidistante lineæ EB. & protracta in eandem GDI. Rursus enim quoniam linea AI. æquidistans est lineæ EZ. est sicut GE. ad EA. Sic GZ. ad ZI. Assumpta autem deforis linea ZD. ratio lineæ GZ. ad ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ratione lineæ DZ.



ad lineam ZI. Est autem ratio lineæ DZ. ad lineam ZI. eadem quæ est ratio DB. ad BA. eo quod in æquidistantes lineas AI. & ZB. ductæ sint lineæ BA. & ZI. Quare ratio lineæ GZ. ad lineam ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Porro ratio lineæ GE. ad EA. eadem est quæ lineæ GZ. ad lineam ZI. Ergo ratio lineæ GE. ad lineam EA. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam

ZD.

ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Quod demonstrandum erat.

Hactenus Ptolemæus; sed recte admonet Rainholdus post Theonem coniugationis κατὰ σύνθεσιν quadruplicem esse varietatē, κατὰ διαίρεσιν, duplicem. Nam secundum compositionem, aut tota linea exterior confertur ad partem superiorem versus angulum, aut ad partem inferiorem ab angulo; aut tota interior confertur ad partem vel superiorem, vel inferiorem. At secundum diuisionem, tam exterioris, quam interioris pars inferior ad superiorem refertur. Quibus omnibus singulæ ἀνάπαλιν seu conuersim respondent. Vt exterior GA. confertur aut cum AE. aut cum EG. & tota interior, GD. aut cum DZ. aut cum GZ. aut exterioris pars inferior GE. ad superiorem EA. aut interioris pars inferior GZ. ad superiorem ZD. & conuertendo. Singuli autem casus demonstrantur directi quidem a Theone, etiam conuersi a Rainholdo. Nempe

1. *Ratio GA. ad AE. componitur ex ratione GD. ad DZ. & BZ. ad BE.*
2. *Ratio AG. ad GE. componitur ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE.*
3. *BE. ad EZ. ex ratione BA. ad AD. & DG. & ad GZ.*
4. *EB. ad BZ. ex EA. ad AG. & GD. ad PZ.*
5. *GE. ad EA. ex GZ. ad ZD. & DB. ad BA.*
6. *BZ. ad ZE. ex BD. ad DA. & AG. ad GE.*

Sed Alkindus Arabs, & ab eo Rainholdus, animaduertit, in singulis modis quos superius posuimus, 180. coniugationes directe fieri posse, totidem ἀνάπαλιν ex quibus soli 36. sint vtiles ac necessarij, 12. impossibiles, reliqui inutiles, atque horum 36. modorum octodecim, esse reliquorum conuertentes. Modi autem necessarij in sex quibuslibet quantitatibus in quibus prima ad secundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad sextam. hac tabula continentur.

Tabula

Tabula 18. modorum necessariorum.

Primus	1. ad	2. ex	3. ad	4. &	5. ad	6.
II.	1	2	3	6	5	4
III.	1	3	2	4	5	6
IV.	1	3	2	6	5	4
V.	1	5	2	6	3	4
VI.	1	5	2	4	3	6
VII.	2	4	1	3	6	5
VIII.	2	4	1	5	6	3
IX.	2	6	1	5	4	3
X.	2	6	1	3	4	5
XI.	3	4	1	2	6	5
XII.	3	4	1	5	6	2
XIII.	3	6	1	2	4	5
XIV.	3	6	1	5	4	2
XV.	4	5	2	1	3	6
XVI.	4	5	2	6	3	1
XVII.	5	6	1	2	4	3
XVIII.	5	6	1	3	4	2

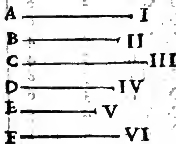
Horum autem modorum primum Ptolemeus in prima coniugatione sex prædictarum quantitatum; septimum, octauum, vndecimum, decimum septimum Rainholdus; reliquos omnes nos aliquando totidem theorematis demonstrauimus; sed nunc, quod mirum videri posset, & quod vix fieri posse quis credat omnes sequenti propositione complexi sumus.

THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

Datis ſex quantitatibus quarum primæ ratio ad ſecundum componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam; omnes modos neceſſarios, quibus ratio duarum quarumlibet, ex aliarum rationibus componitur, demonſtrare.

Sint datæ ſex quantitates. A.B.C.D.E.F. in quibus ratio A. primæ, ad B. ſecundam, ſit compoſita ex ratione C. tertię, ad D. quartam, & E. quintæ, ad F. ſextam; propoſitum ſit demonſtrare, proportiones ſex illarum quantitatum, octodecim modis, quos in tabulam ſuperiori ſcholio redegimus, directè, totidemque conuerſim componi poſſe.



Quoniam ratio A. ad B. componitur ex ratione C. ad D. &
13.3.huius. E. ad .F. per primum modum datum, etiam ratio C. ad D.
13.3.huius. componetur ex ratione A. ad B. & F. ad E. qui vndecimus modus eſt. Item quia ratio A. ad B. componitur ex rationibus E. ad F. & C. ad D. etiam ratio E. ad F. componetur ex ratione A. ad B. & D. ad C. qui eſt modus decimus ſeptimus, atq; ita exiſtunt tres modi in quibus ratio

A.	B.		C.	D.	E.	F.	1.
C. ad	D.	ex ratione	A.	ad B.	& F. ad	E.	11.
E.	F.		A.	B.	D.	C.	17.

componitur; Iam vero in vnoquoque horum modorum ſex magnitudines pro ordine quem obtinent ordinalibus numeris

numeris insigniantur; ita vt in primo sit A. prima quantitas, B. secunda, C. tertia, &c. In secundo C. prima, D. secunda, A. tertia B. quarta F. quinta E. sexta, atque ita in reliquo, E. prima, F. secunda &c. Quoniam ratio A. ad B. componitur ex rationibus. C. ad D. ex E. ad F. etiam ratio A. ad B. componetur ex rationibus C. ad F. & E. ad D. qui secundus modus est; præterea quia ratio C. ad D. componitur ex rationibus A. ad B. & F. ad E. etiam ratio C. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. qui duodecimus modus est. Adhæc quia ratio E. ad F. componitur ex rationibus A. ad B. & D. ad C. eadem ratio E. ad F. componetur ex rationibus A. ad C. & D. ad B. qui est modus decimus octauus.

11.3. huius. 11.3. huius. 11.3. huius.

A.	B.		C.	F.	E.	D.	2
C. ad	D. ex ratione		A. ad E.	& F. ad	B.		12
E.	F.		A.	C.	D.	B.	18

Rursus in vnoquoque horum modorum sex magnitudines pro ordine quem habent ordinali numero affectæ intelligantur. Quoniam ratio A. ad B. constat ex rationibus C. ad F. & E. ad D. etiam ratio C. ad F. conctabit ex rationibus A. ad B. & D. ad E. qui est modus 13. Item quoniam ratio C. ad D. conflatur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. etiam ratio A. ad E. conflabitur ex rationibus C. ad D. & B. ad F. qui est modus quintus. Denique quia ratio E. ad F. componitur ex ratione A. ad C. & D. ad B. etiam ratio A. ad C. componetur ex rationibus E. ad F. & B. ad D. qui constituit tertium modum tabulæ.

13.3. huius. 13.3. huius. 13.3. huius.

C	F.	A.	B.	D.	E.	13.
A ad	E. ex	C. ad	D. &	B. ad	F.	5.
A.	C.	E.	F.	B.	D.	3.

Præterea quia in proximis modis ratio primæ & secun-

dæ, componitur ex rationibus tertiæ & quartæ, & ratione
11.3.huius. quintæ & sextæ; probabimus ex sexta propositione tertij huius, quod ratio C. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad B. qui est modus decimus quartus. Item ratio A.
11.3.huius. ad E. componitur ex rationibus C. ad F. & B. ad D. qui est
11.3.huius. modus sextus tabulæ; denique ratio A. ad C. componitur ex rationibus E. ad D. & B. ad F. qui modus est quartus in tabula.

C.		F.		A.		E.		D.		B.		14.
A.	ad	E.	ex	C.	ad	F.	&	B.	ad	D.		6.
A.		C.		E.		D.		B.		F.		4.

13.3.huius. Eodem modo, quo supra, ex septima tertij huius, omisso primo trium posteriorum modorum, ex quo nihil noui amplius demonstrari potest, quoniam in secundo, ratio A.
13.3.huius. ad E. componitur ex rationibus B. ad D. & C. ad F. etiam ratio B. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad C. qui octauum modum tabulæ constituit; præterea quia in tertio ratio A. ad C. constituitur ex rationibus B. ad F. &
13.3.huius. E. ad D. etiam ratio B. ad F. constituetur ex rationibus A. ad C. & D. ad E. qui modus est decimus tabulæ.

B.		D.		A.		E.		F.		C.		8.
	ad		ex		ad		&		ad			
B.		F.		A.		C.		D.		E.		10.

11.3.huius. Eadem ratione, ex 6. tertij huius ratio B. ad D. componitur ex rationibus A. ad C. & F. ad E. qui est septimus mo-
11.3.huius. dus, & ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad C. qui est nonus modus. At vero ex 7. tertij huius. Quoniam ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad C.
13.3.huius. & D. ad E. etiam ratio D. ad E. componetur ex rationibus B. ad F. & C. ad A. qui 16. modus est in tabula.

B.

B.	D.	A.	C.	F.	E.	7
B. ad F. ex	A. ad E. &	D. ad C.				9
D.	E.	B.	F.	C.	A.	16

Denique in vltima ſerie quia ratio D. ad E. conſtat ex rationibus B. ad F.& C. ad A. ex propoſitione 12: 3. huius ratio D. ad E. conſtabit ex rationibus B. ad A. & C. ad F. qui eſt 15. modus. 12.3.huius.

D. ad E. ex B. ad F. & C. ad A. | 15.

Atque ita datis ſex quantitatibus, quarum primæ ratio ad ſecundam componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, omnes modos neceſſarios directos quibus ratio duarum quarumlibet ex aliarum rationibus componitur demonſtrauimus.

Conuertentes autem ſuperiorum modorum, ex 12. huius aperte demonſtrantur; nam in omnibus ſi fuerit primæ ad ſecundam ratio compoſita ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, etiam ratio ſecundæ ad primam componetur ex ratione quartæ ad tertiam, & ſextæ ad quintam. Quare etiam ſuperiorum modorum conuertentes demonſtrauimus; Quod propoſitum fuerat. 12.3.huius.

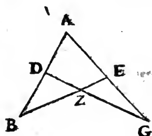
SCHOLIVM.

Hinc patet quam facilius, nun ſolum modi omnes in Ptolomei prima coniugatione ſex quantitatum, vnica propoſitione demonſtrentur, quam infinitis, à Rainholdo comment. in c. 11. primi magnæ conſtructionis; ſed reliqui reliquarum quinque coniugationum modi, de quibus in Scholio præcedentis propoſitionis, ac omnino omnes compoſitiones rationum neceſſariæ, quæ inter ſex quaslibet quantitates exiſtant: quod ingens compendium eſt, ac ni fallor magnum in Geometricis vſum habebit.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI prima recta & secunda angulum faciant à quarum etremitatibus ducantur tertia ab extremitate primæ, & quarta ab extremitate secundæ in punctum concurrentes, & in oppositas rectas quæ angulum prius faciebant, incidentes, ita vt quarta primam bifariam diuidat: erit vt prima incidentium ad segmentum superius, ita incidentium secunda ad medietatem segmenti inferioris.

FACIAT prima AG. cum secunda AB. angulum ad A. & ab extremitatibus primæ & secundæ G. & B. ducantur GD. tertia & BE. quarta concurrentes in puncto. Z. & secet GD. oppositam rectam AB. in D. & BE. oppositam AG. bifariam in E. Dico esse vt GD. ad DZ. ita EB. ad medietatem ipsius BZ. Vocentur autem AG. prima quantitas AB. secunda GD. incidentium prima: BE. incidentium secunda. Z. punctũ concursus. EA. DA. ZE. ZD. segmenta superiora. ZG. ZB. EG. DB. segmenta inferiora. Quoniam ratio GA. ad AE. cõponitur ex rationibus GD. ad DZ. & BZ. ad BE. vt ex Ptolemæo probauimus in Scholio 15. huius, etiam ratio GD. ad DZ. componetur ex rationibus GA. ad AE. & EB. ad BZ. id est ex rationibus EB. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur cum primæ GD. ad secundam DZ. ratio componatur ex rationibus tertiæ EB. ad quartam BZ. & quintæ AG. ad sextã AE. erit vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam sit quarta BZ. vt GA. quinta ad sextam AE. Sed GA. ad AE. ex hypothesi habet



Schol. 15. huius. 13. huius.

10. 3. huius.

habet ratione duplam, ergo vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam BZ. habet proportionem dnplam, id est ad dimidiam ipsius BZ. Quod erat propositum.

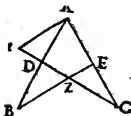
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Isdem positis: erit vt segmentum secundæ quantitatis superius, ad inferius, ita segmentum superius secundæ incidentium ad medietatem inferioris.

SINT eadem quæ superiori propositione. Dico esse vt AD. ad DB. ita ZE. ad medietatem ipsius BZ. Quoniam ratio AG. ad GE. constat ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE. Quod demonstrat Theon sexta prop. in 12. caput 1. Almagesti, & Erasmus Rainholdus in idem caput (quod ipse vndecimum statuit) proposit. 2. & nos sequenti Scholio ex illis authoribus demonstrabimus; erit etiam ratio 13.3.huius. AD. ad DB. composita ex ratione AG. ad GE. & ZE. ad BZ. seu quod idem est ex rationibus ZE. ad BZ. & AG. ad GE. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad aliam ad 10.3.huius. quam BZ. habeat rationem quam AG. ad GE. sed AG. ipsius GE. ponitur dupla. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad eam cuius BZ. sit dupla, id est, ad dimidiam BZ. Quod statutum fuerat demonstrare.

SCHOLIVM.

Qvod vero ratio AG. ad GE. componatur ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE. ita ex supradictis auctoribus demonstratur. Sit enim vt in Scholio 15. huius figura 2. æquidistans AI. recta EB. & producatur ad ipsam GDI. erit ratio AG.



GE.

GE. eadem rationi AI. ad EZ. & assumpta BZ. erit ratio AI. ad EZ. hoc est. AG. ad GE. composita ex rationibus AI. ad BZ. & BZ. ad ZE. est autem ratio AI. ad BZ. eadem rationi AD. ad DB. Igitur ratio AG. ad GE. constat ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IIsdem positis: erit vt secunda quantitas ad segmentum inferius, ita segmentum inferius primæ incidentium ad superius.

SINT eadem quæ 17. huius. Dico esse vt BA. ad DB. ita GZ. ad ZD. Quoniam ratio GE. ad EA. componitur rationibus GZ. ad ZD. & DB. ad BA. vt ex Ptolemæi c. 12. magnæ syntaxeos probauimus schol. 15. huius, etiam ratio GZ. ad ZD. componetur ex rationibus GE. ad EA. & BA.
13.3. huius. ad BD. seu quod idem est ex rationibus BA. ad DB. & GE.
10.3. huius. ad EA. Igitur vt GZ. ad ZD. ita BA. ad aliam ad quam DB. habeat eam rationem quam GE. ad EA. sed GE. ponitur æqualis ipsi EA. Ergo vt GZ. ad ZD. ita BA. ad æqualem ipsi DB. nimirum ad ipsam DB. Quod concludere volebamus.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

IIsdem positis, sint præterea anguli BEA. BDG. æquales: erit vt prima quantitas ad secundam, ita incidentium prima ad incidentium secundam.

SINT eadem omnia quæ in schemate 17. huius, & præterea sint anguli BEA. BDG. æquales: Dico esse vt GA. ad AB. ita GD. ad BE. Ducatur EI. ipsi GD. parallela. Hinc ad duas GD. BE. constituatur tertia IE. erit ratio GD. ad IE.

com-

composita ex rationibus GD. ad BE.& BE.ad IE. Rursus inter GA. AE. ponantur duæ intermediæ BZ. ZD.erit ratio GA.ad AE. cõposita ex tribus rationibus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. vt vero GA. ad AE.ita GD.ad IE. (æquiangula enim sunt triangula GAD. EAI. ob parallelas IE.GD. quæ efficiunt angulos externos IEA. EIA. æquales internis AGD. ADG.) Quare ex duabus proportionibus æqualibus GD.ad IE. & GA. ad AE. prima ex duabus rationibus GD. ad BE. & BE. ad IE. composita est; secunda ex tribus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. composita est, æquales igitur sunt duæ rationes GD.ad BE.& BE.ad IE.tribus rationibus GA.ad BZ.& BZ.ad ZD. & ZD.ad AE. (æqualium enim quantitatum æquales sunt omnes partes simul sumptæ.) Igitur ex duabus primis rationibus auferatur ratio BE. ad IE. & ex tribus posterioribus ratio BZ. ad ZD. quæ æqualis seu eadem est rationi BE. ad IE. (æquiangula enim sunt triangula BEI. BZD. ob communem angulum ad B. & ob duas paeallelas DZ. IE. quæ efficiunt angulos externos BDZ.BZD. æquales internis BIE. BEI.) remanet ratio GD. ad BE. æqualis rationibus GA.ad BZ. & ZD. ad AE. Cum igitur ratio GD. primæ ad BE.secundam sit composita ex rationibus GA.tertiæ ad BZ. quartam,& ZD.quintæ ad AE.sextam,etiam ratio GD. primæ ad BE.secundam, (ex 11.huius) componetur ex rationibus GA. tertiæ ad AE. sextam, & ZD. quintæ ad BZ. quartam, seu quod idem est ratio GD. ad BE. componetur ex rationibus ZD. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur vt GD. ad BE.ita ZD.ad aliam ad quam BZ.sit vt GA. ad AE. (ex 10. tertij huius.) Sed GA.est ipsius AE.dupla, seu AE. est ipsius GA.dimidia: igitur vt GD.ad BE. ita ZD.ad dimidiam ipsius BZ. Sed vt ZD.ad dimidium BZ.ita EA.ad dimidium AB. (æquiangula enim sunt triangula BDZ. BEA.ob communem



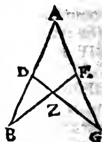
4. 6.
29. 1.
29. 1.
11.3.huius.
10.3.huius.
32. 1.

munemangulum ad B. & æquales ad D. E. ideoque vt DZ.
15. 5. ad ZB. ita EA. ad AB. & consequentium dimidia vt DZ. ad
dimidium ZB. ita EA. ad dimidium AB.) Igitur vt GD. ad
15. 5. BE. ita EA. ad dimidium AB. & posteriorum terminorum dupla est GA. ad AB. vt GD. ad BE. Quod &c.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

Isdem positis, sint præterea anguli BEA. BDG. æquales: erit vt secunda quantitas ad incidentium secundam, ita segmentum superius incidentium secundæ ad dimidium segmenti superioris quantitatis secundæ.

SINT eadem omnia quæ superiori propositione. Dico
3. 6. esse vt BA. ad BE. ita ZE. ad medietatem DA. Quoniam parallelæ sunt IE. DZ. ex hypothesi, erit vt BZ. ad ZE. ita BD.
ad DI. assumatur extrinsecus media DA. constabit ratio BD.
3. & 4. 6. ad DI. id est BZ. ad ZE. ex rationibus BD. ad DA. & DA. ad
DI. vt autem AD. ad DI. ita AG. ad GE.
Igitur ratio BZ. ad ZE. composita est ex
ratione BD ad DA. & ex AG. ad GE.
16. 3. huius. Quare per tertium modum 16. huius erit
ratio BZ. ad BD. composita ex rationibus
10. 3. huius. ZE. ad DA. & AG. ad GE. Igitur vt BZ.
ad BD. ita ZD. ad medietatem DA. ad
quam integra DA. rationem habet quam
AG. ad sui dimidium GE. Vt autem BZ.
ad BD. ita BA. ad BE. (æquiangula enim sunt triangula
32. 1. BDZ. BEA. ob communem angulum ad B. & angulos BDZ.
BEA. qui æquales ponuntur.) Igitur vt BA. ad BE. ita ZE.
ad medietatem DA. Quod erat &c.

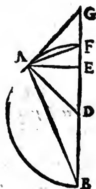


THEO-

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

CHordæ duorum arcuum inæqualium ſemicirculum complentium, eamdem habent rationem quam ſecans arcus minoris cum ſinu toto ad tangentem eiuſdem arcus, aut quam tangens ad differentiam ſecantis.

SIT circulus FAB. cuius centrum D. diameter BF. arcus minor FA. maior ſemicirculum complens AB. Chorda arcus minoris AF. maioris AB. ſinus totus DA. Tangens eiuſdem arcus FA. recta GA. ducta ex puncto A. ad punctum G. in diametro producta; ideoque DG. ſecans arcus FA. & GF. eius differentia FE. ſinus rectus AE. verſus FE. complementi ED. & recta BG. compoſita ex ſinu toto BD. & ſecante DG. Dico eam eſſe rationem BA. ad AF. quæ eſt BG. ad GA. aut GA. ad GF. Erunt enim triangula BAF. & GAD. rectangula ad A. quæ diuidentur perpendiculari AE. communi ad baſim in triangula ſimilia, eritque vt BE. ad EA. ita EA. ad FE. ideoque quadratum AE. tam rectangulo BEF. quam rectangulo GED. æquale eſt. Igitur æqualia ſunt rectangula BEF. GED. atque adeo vt BE. ad ED. ita GE. ad EF. & diuidendo vt BD. ad DE. ita GF. ad FE. ſed vt BD. ad DE. ita AD. ad DE. quod æquales ſint, BD. AD. & vt AD. ad DE. ita GA. ad AE. ergo vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & permutando, ac conuertendo, vt GA. ad GF. ita AE. ad EF. ſed vt AE. ad EF. ita BA. ad AF. ergo vt GA, tangens arcus AF. ad GF differentiam ſecantis, ita chorda BA. ad chordam AF. Rurſus cum rectangulum BGF. ſit æquale quadrato GA. erit vt AG. ad GF. ita BG. ad GA. ideoque vt



31.&18.3.
8. 6.
4. 6.
17. 6.
1. pron.
14. 6.
15.defin.
8 6.
11. 5.
8. 6.
36. 6.
14. 6.

chorda BA. ad chordam AF. ita BG. composita ex sinu toto, & secante arcus AF. ad GA. tangentem eiusdem arcus AF. Quod erat propositum.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifestum est esse ut sinum totum ad sinum complementi arcus, ita differentiam secantis ad sinum versum. probatum enim est esse ut BD. ad DE. ita GF. ad FE.

COROLLARIVM. II.

Constat praeterea esse ut tangentem ad sinum rectum, ita differentiam secantis ad sinum versum eiusdem arcus. Nam demonstratum est esse ut GF. ad FE. ita GA. ad AE.

COROLLARIVM. III.

Adhaec sequitur si ex eodem puncto circuli ad diametrum, eiusdem arcus tangens, chorda, atque sinus ducantur; angulum à tangente & sinu recto contentum à chorda secari bifariam. Nam cum ex eodem puncto A. ad diametrum ducta sint AG. AE. AF. sitque ut GF. ad FE. ita GA. ad AE. angu-
3. 6. *lus GAE. diuiditur bifariam à chorda AF.*

COROLLARIVM. IV.

Denique probatum est esse ut BG. ad GA. ita GA. ad GF.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Quadratum circulo inscriptibile ad quadratum chordae arcus Quadrante minoris rationem habet quam secans eiusdem arcus ad suam differentiam; aut quam sinus totus ad sinum versum.

SINT

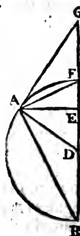
Sint eadem quæ ſuperiori propoſitione. Dico eſſe quadratum circulo inſcriptibile ad quadratum cordæ AF. arcus AF. quadrante minoris, vt eſt ſecans eiuſdem arcus AF. ad GF. eiuſdem ſecantis differentiam; aut vt eſt DF. ſinus totus ad FE. ſinum verſum: Nam cum ſit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & AD. hoc eſt FD. ad DE. & GD. ad DA. id eſt ad DF. erit vt FD. ad DE. ita GD. ad DF. & per conuerſionem rationis vt DF. ad FE. ita DG. ad DF. Aſſumantur duæ BF. BF. ſeu eadem BF. bis, erit per primam tertij huius vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulũ ſub BF. GF. ita rectangulum ſub BF. DF. ad rectãgulum ſub BF. FE. ſed vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulum ſub BF. GF. ita DG. ad GF. ergo vt DG. ad GF. ita rectangulum BFD. ad rectangulum BFE. at vero rectangulo BFD. æquale eſt quadratum circulo inſcriptibile, cum vtrumque quadrati DF. ſit duplum, & rectangulo BFE. æquale eſt quadratum AF. Igitur vt DG. ſecans arcus AF. ad FG. ſecantis differentiam, ita Quadratum circulo inſcriptibile, ad Quadratum chordæ FA. Vt autem DG. ad GF. ita oſtenſum eſt paulo ante eſſe DF. ſinum totum ad EF. ſinum verſum: vt ergo DF. ad EF. ita quadratum circulo inſcriptibile, ad quadratum chordæ FA. Quod erat &c.

Coroll. 2. 22.3. huius. 8. 6.

11. 5.

1.3. huius.

DG.	GF.	DF.	FE.
BF.	BF.		



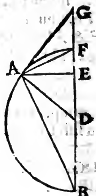
1. 6.

8.&17. 6.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

Quadratum chordæ ad quadratum tangentis eiuſdem arcus eſt vt quadratum circulo inſcriptibile ad rectangulum ſub ſecante eiuſdem arcus, & ſecante cum ſinu toto.

SINT eadem quæ duabus superioribus propositionibus. Dico esse quadratum chordæ AF. ad quadratum tangentis AG. vt quadratum circulo inscriptibile ad rectangulum BGD. contentum secante DG. & secante cum sinu toto, BG. Nam
Coroll. 2. 22.3. huius. cum sit vt GF. ad FE. ita GA. ad
8. 6. AE. id est GD. ad DA. seu GD. ad
1.3. huius. ad DF. si assumantur BG. BF. erit vt rectangulum BG. GD. ad rectangulum BF. DF. ita rectangulum



GD.	DF.	GF.	FE.
BG.	BF.		

BG. GF. ad rectangulum BF. FE. & conuertendo erit rectanguli BFD. ad rectangulum BGD. vt rectanguli BFE. ad rectangulum BGF. Sed rectangulo BFD. æquale est quadratum circulo inscriptibile, vt constat ex progressu superioris propositionis, & rectangulo BFE. est æquale quadratum
8. & 17. 6. 36. 3. FA. & rectangulo BGF. quadratum GA. Igitur erit vt quadratum circulo inscriptibile ad rectangulum BGD. ita quadratum AF. ad quadratum AG. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX demonstratis constat esse vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita quadratum FA. ad quadratum GA. Nam probatum est esse vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita rectangulum BFE. id est quadratum AF. ad rectangulum BGF. id est quadratum GA.

THEO-

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

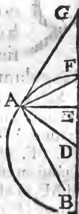
QVadratorum chordarum inæqualium semicirculum complentium maius ad minus rationem habet quam sinus totus compositus cum sinu complementi arcus cui minor chorda subtenditur, ad sinum versum eiusdem arcus, & quam secans eiusdem arcus composita cum sinu toto ad differentiam secantis.

Supponantur adhuc superiora diagrammata. Dico quadratum BA. ad quadratum AF. esse vt BE. ad EF. & vt BG. ad GF. Cum enim sit vt EF. ad GF. ita EA. ad AG. & permutando vt EF. ad EA. id est EA. ad EB. ita FG. ad AG. sed est etiam vt FG. ad AG. ita GA. ad GB. erit ergo vt EA. ad EB. ita GA. ad GB. & permutando vt EA. ad GA. id est EF. ad FG. ita EB. ad GB. & permutando ac conuertendo vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. Rursus cum quadrato BA. sit æquale rectangulum FBE. & quadrato FA. rectangulum BFE. habeantque dicta rectangula communem basim BF. erunt vt altitudines BE. EF. Igitur vt BE. ad EF. ita rectangulum FBE. ad rectangulum BFE. id est quadratum BA. ad quadratum AF. sed etiam paulo ante ostensum est esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. ergo vt BG. ad GF. ita quadratum BA. ad quadratum AF. Quod propositum fuit demonstrare.

Coroll. 2. 22.3. huius.

Coroll. 4. 22.3. huius. 11. 5.

8. & 17. 6.



COROLLARIVM. I.

HInc patet esse vt quadratum sinus totius ad quadratum tangentis arcus, ita sinum complementi dicti arcus ad differentiam sinus complementi & secantis. Nam si ponatur

BA.

BA. sinus totus in triangulo rectangulo AEB. erit AF. tangens anguli ABF. & BF. secans eiusdem anguli, & BE. sinus rectus anguli BAE. qui est complementum anguli ABF. & EF. differentia secantis BF. & sinus complementi BE. est autem probatum esse vt quadratum BA. ad quadratum AF, ita BE. ad EF.

COROLLARIVM. II.

C*Onstat etiam esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. hoc enim in progressu demonstrationis ostendebamus.*

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

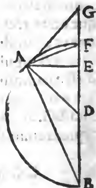
QVadratum tangentis arcus Quadrante minoris ad quadratum sinus totius rationem habet quam rectangulum sub aggregato sinus totius, & secantis ac sinu verso, ad rectangulum sub sinu toto, & sinu complementi.

SINT eadem omnia quæ superioribus propositionibus. Dico esse quadratum AG. ad quadratum AD. vt rectangulum sub BG. FE. ad rectangulum BDE.

Coroll. 2. 21.3. huius. Quoniam est vt GF. ad FE, ita GA ad AE. id est AD. ad DE. id est

8. 6. 13. 5. FD. ad DE. erit vt GF. ad FE. ita FD. ad DE. & permutando vt GF. ad FD. ita FE. ad DE. Assumantur

1.3. huius. duæ BG. BD. erit vt rectangu-



GF.	FD.	FE.	DE.
BG.	BD.		

lum sub BG. GF. ad rectangulum sub BD. FD. ita rectangulum sub BG. FE. ad rectangulum sub BD. DE. sed rectangulo

gulo

gulo BG*F*. est æquale quadratum AG. & rectãgulo sub BD. *F*D. quadratum AD. vt igitur quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BG. E*F*. ad rectangulum BDE. Quod intendebamus demonstrare. 36. 3.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

Sinus versus ad sinum totum cum secante rationẽ habet, quam rectangulũ sub sinu complementi & sub sinu verso, ad rectangulum sub sinu toto, & sub aggregato sinus totius & sinus complementi.

In schemate superiori. Dico esse vt EF. ad BG. ita rectangulum DEF. ad rectangulum DBE. Cum enim sit vt EF. ad FG. ita EA. ad AG. id est ED. ad DA. seu ED. ad DB. erit vt EF. ad FG. ita ED. ad DB. & cum sit vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. erit ratio composita ex *E*F. ad FG. & FG. ad BG. eadem. quæ compositæ D*E*. ad BD. & *E*F. ad *E*B. Igitur ex 3. 3. huius vt *E*F. ad BG. ita rectangulum D*E*F. ad rectangulum *E*BD. Quod demonstrare oportuit. Coroll. 2. 22. 3. huius. 8. 6. Coroll. 2. 25. 3. huius. 3. 3. huius.

*E*F.	FG.	D*E*.	BD.
FG.	BG.	*E*F.	EB.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

Quadrata sinus totius, chordæ arcus quadrante maioris, & chordæ arcus qui prioris sit complementum ad duos rectos ordine coniuncto habent eam rationem quam tria rectangula, primum sub secante & sinu toto; secundum sub diametro & secante cum sinu toto;

tertium sub differentia secantis & diametro. Ac tam quadrata quam rectangula ordine, ac coniunctim se habent vt sinus totus; duplum compositi ex sinu complementi & sinu toto; & duplum sinus versi minoris arcus: aut etiam ordine hæc terna rationem habent quam secans, duplum secantis cum sinu toto, & duplum differentiæ secantis.

Repetantur figuræ præcedentes cum ἐκθέσει prop. 22. huius. Dico quadrata rectarum BD. BA. AF. eam habere ordine rationem, quam habent tria rectangula GDF. GBF. GFB. Item quam tres rectæ DF. duplum BE. duplum FE. Item quam tres rectæ DG. duplum BG. & duplum FG. Quoniam tria trectangula sub FB. FD; & sub FB. & dupla BE; & sub FB. & dupla FE; ha bent eandem ba-
1. 6. sim FB. erunt ordine vt altitudines FD. duplum BE. & duplum FE. sed rectanguli sub FB. FD. dimidium est quadratum FD; & rectanguli sub FB. ac duplo BE. dimidium est rectangulum FBE. ac denique rectanguli sub duplo FE. & FB. dimidium est rectangulum BFE. quæ omnia
15. 5. se habent vt sua dupla; ergo quadratum FD. rectangulum FBE. & rectangulum BFE. inter se sunt ordine, vt tres rectæ FD; duplum BE. & duplum FE. Rectangulo autem FBE. est æquale quadratum AB. & rectangulo BFE. quadratum AF. (nam cum in trianguli rectanguli BAF. basim BF. ex angulo
8. & 4. 6. recto A. demissa sit perpendicularis AE. erit vt FB. ad BA.
17. 6. ita BA. ad BE. ideoque quadratum AB. æquale rectangulo FBE. & vt BF. ad FA. ita FA. ad FE. ideoque quadratum FA. æquale rectangulo BFE.) Igitur quadrata FD; BA; AF; inter se ordine sunt, vt tres rectæ FD. dupla BE. & dupla FE.
Coroll. 2. Rursus cum ostensum sit superius esse vt GF. ad FE. ita
22. 3. huius. GA. ad AE. id est GD. ad DA. seu GD. ad DF. erit vt GF. ad FE. ita GD. ad DF. & conuertendo, vt FE. ad FG. ita DF.
8. 6. ad DG. Item cum sit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. id est

AD.

AD. ad DE. seu BD. ad DE. erit componendo vt GE. ad EF. ita BE. ad ED. & permutando, ac componendo, vt GB. ad BE. ita FD. ad DE. id est AD. ad DE. id est GA. ad AE. id est GF. ad FE. Quare vt GF. ad FE. ita GB. ad BE. & conuertendo vt FE. ad GF. ita BE. ad GB. sed etiam paulo ante ostensum est esse vt FE. ad GF. ita DF. ad DG. erit igitur vt DF. ad DG. ita BE. ad GB. & FE. ad GF. & permutando, vt DF. ad BE. ita DG. ad GB. est autem vt BE. ad FE. ita GB. ad GF. ideoque vt DF. ad duplum BE. ita DG. ad duplum BG. & vt duplum BE. ad duplum FE. ita duplum BG. ad duplum FG. 8. 6. Coroll. 2. 25. 3. huius.

DF.	Duplum BE.	Duplum FE.
DG.	Duplum BG.	Duplum FG.

Cum igitur quadrata DF. BA. FA. ordine se habeant vt DF; duplum BE; & duplum FE; & vt tres illæ rectæ ita ordine sint DG. duplum BG. duplum FG. habebunt quadrata DF. BA. FA. eam ordine rationem quam tres rectæ DG. duplum BG. & duplum FG.

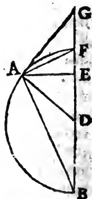
Denique tria rectangula sub GD. FB; & sub duplo GB. & FB; & sub duplo FG. & FB; cum habeant eandem basim FB. erunt ordine ac coniunctim vt tres altitudines GD; duplum GB; duplum FG. 1. 6. Sumpto autem in vno quoque rectangulo dimidio vnius lateris, erit rectangulum sub GD. & FD. dimidio ipsius FB. & rectangulum sub GB. FB. medietas prioris rectanguli sub duplo GB. & FB. & rectangulum sub FG, FB. medietas rectanguli sub duplo FG. & FB. Eruntigitur 15. 5. rectangula GDF. GBF. GFB. vnumquodque in ratione rectanguli dupli; sed rectangula dupla ostensa sunt esse in ratione rectarum DG. dupli GB. dupli FG. Igitur rectangula GBF. GDF. GFB. sunt ordine vt DG. duplum BG. Duplum FG. sed eandem ordine ac coniunctim ratione habent

quadrata D*F*. BA. *F*A. Igitur ordine, ac coniunctim eam rationem habent quadrata DA. BA. *F*A. quam rectangula GD*F*. GB*F*. G*F*B. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

TRia Quadrata tangentis; chordæ; & sinus recti eiusdem arcus inter se rationem habent ordine coniunctam quam ordine perturbato habent, composita ex sinu toto & secante; dupla sinus complementi; & dupla secantis. Et quadratum tangentis ad quadratum sinus recti eiusdem arcus rationem habet quam secans ad sinum complementi.

Repetatur adhuc superiorum propositionum delineatio, in qua arcus AF. tangens GA. sinus rectus AE. chorda AF. Item secans DG. sinus complementi ED. & composita ex sinu toto BD. & secante DG. recta BG. Dico Quadrata GA. *F*A. EA. ordine, ac coniunctim habere rationem quam habent ordine perturbato tota BG; & dupla sinus complementi ED; & dupla secantis DG. id est esse vt quadratum GA. ad quadratum FA. ita BG. ad duplam sinus complementi ED. & vt quadratum FA. ad quadratum EA. ita HB. dupla secantis ad rectam BG. compositam ex sinu toto, & secante.



Producatur BG. in qua ipsi G*F*. sumatur æqualis GH. erit recta BH. dupla secantis DG. nam cum æquales sint BD. D*F*.
15. defin. 2. pron. si æquales addantur *F*G. GH. erunt totæ DG. & composita

ex

ex BD. GH. æquales; eſt autem DG. ſecans, igitur duæ
BD. GH. ſecanti ſunt æquales; tota igitur BH. ex duabus
ſecantibus conſtat, ideoque ſecantis DG. dupla eſt.

Rurſus conſtat rectangulum BGF. quadrato GA. eſſe æ- 36. 3.
quale; item rectangulum BFE. quadrato AF. & rectangu-
lum BEF. quadrato AE. (Nam ob ſimilitudinem triangulo- 8. 6.
rum BFA. AFA. item BEA. AEF. eſt vt BF. ad FA. ita FA. 4. 6.
ad FE. Item vt BE. ad EA. ita EA. ad EF. ideoque tam re- 17. 6.
ctangulum BFE. quadrato FA. quam rectangulum BEF.
Quadrato AE. eſt æquale.)

Rectangula autem BGF. BFE. habent rationem compo- 23. 6.
ſitam ex ratione GB. ad BF. & GF. ad FE. vt vero GF. ad
FE. ita GA. ad AE. (ob angulum GAE. biſariam ſectum 3. 6.
recta AF.) & vt GA. ad AE. ita AD. ad DE. id eſt FD. ad Coroll. 2. 22. huius.
DE. & vt FD. ad DE. (ſumpto terminorum duplo) ita du- 8. & 4. 6. 15. 5.
plum FD. ad duplum DE. id eſt FB. ad duplum DE. Igitur
a primo ad vltimum, vt GF. ad FE. ita FB. ad duplum DE.
Quare cum ratio BGF. BFE. ſit compoſita ex rationibus GB.
ad BF. & BF. ad duplam DE. erit vt rectangulum BGF. ad
rectangulum BFE. id eſt quadratum GA. ad quadratum FA.
ita GB. ad duplam DE.

Inſuper rectangula BFE. BEF. poſita communi altitudi-
ne EF. inter ſe ſunt vt baſes FB. EB. vt igitur FB. ad BE. ita
rectangulum BFE. ad rectangulum BEF. Quoniam vero eſt
vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. id eſt BG. ad GH. erit conuer- Coroll. 2. præcedentis
tendo, & componendo, vt FB. ad BE. ita HB. ad BG. ſed vt prop.
FB. ad BE. ita modo probatum eſt eſſe rectangulum BFE.
ad rectangulum BEF. igitur rectangulum BFE. ad rectan-
gulum BEF. id eſt Quadratum FA. ad quadratum EA. ra-
tionem habet quam HB. nimirum duplum ſecantis ad BG.
compoſitam ex ſinu toto, & ſecante.

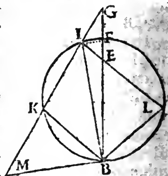
Cum igitur ſit vt GA. quadratum, ad quadratum FA. ita
GB. ad duplum DE. vt probauimus in prima parte huius; &
vt quadratum FA. ad quadratum EA. ita HB. ad BG. Con-
ſtat quod primo proponebatur. Et ex æqualitate erit vt BH.

dupla secantis ad DE. duplam sinus complementi, ita Quadratum *GA.* ad quadratum EA. & priorum terminorum dimidia, vt secans D*G.* ad sinum complementi D*E.* ita quadratum *GA.* ad quadratum EA. Quod erat propositum.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum basim secet, efficientes cum dicto latere angulos æquales: erit vt composita ex basi & segmento exteriori, ad segmentum exterius, ita segmentorum interiorum remotius ab exteriori, ad vicinius.

SIT triangulum rectangulum BI*F.* cuius basis B*F.* latera circa angulum rectum I. sint IF. I*B.* ex puncto I. in basim ducantur duæ rectæ I*E.* intra triangulum I*G.* extra, facientes angulos *E*IF. *F*I*G.* æquales & secantes basim productam in tria segmenta, externum *GF.* interna BE. remotius ab externo, & EF. vicinius, ac contiguum. Dico esse vt B*G.* ad *G*F. ita *B*E. ad *E*F. Diametro BF.



Schol. in 31. 3. circa angulum rectum FIB. describatur circulus FI*B.* cadatque angulus rectus supra punctum contactus lineæ ductæ à puncto *G.* in circulum, & producantur *G*I. IE. quæ primo circulum secent in punctis KL. ac connectantur KB. *B*L. fiatque angulus K*B*M. (producta *G*K. in M.) æqualis angulo KB*G.*

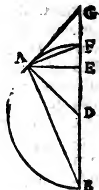
36. 3. 14. 6. Quoniam æqualia sunt rectangula *BGF.* K*G*I. erit circa angulum *G.* vt *BG.* ad *G*I. ita K*G.* ad *G*F. & permutando vt *BG.*

ad

ad KG. ita GI. ad GF. æquiangula igitur sunt triangula GIF. GBK. & æquales anguli GIF. GBK. & GFI. GKB. Item cum 6. 3.
in triangulis IEF. EBL. æquales sint anguli ad E. verticem, & 15. 1.
duo FIE. EBL. eidem arcui FL. insistentes, æquiangula sunt 27. 3.
tota triangula, sed angulo FIE. æqualis ponitur FIG. & ipsi 32. 1.
FIG. ostensus est æqualis KBG. æquales igitur sunt anguli KBG. LBE. sed angulo KBG. factus est æqualis KBM. Igitur KBM. æqualis est tam angulo LBE. quam GIF. & FIE. atque ideo totus MBG. toti GIF. æqualis est, communis autem
est angulus ad G. æqualis igitur est reliquus IEF id est BEL. 32. 1.
reliquo BMK. Cum igitur duo triangula KBM. LBE. habeant duos angulos KBM. BMK. æquales duobus LBE. BEL. 15. 1.
& latera KB. BL. æqualia (cum enim æquales sint anguli KBG. LBE. æquales erunt arcus FK. FL. ideoque & 26. 3.
complementa ad duos rectos KB. LB. ac propterea etiam earum chordæ KB. LB. æquales) æquilatera erunt triangula 2. pron.
29. 3.
KBM. BLE. & latus KM. æquale erit ipsi EL. & EB. ipsi BM. 26. 1.
Igitur cum angulus GIE. sit diuisus bifariam recta IF. ex hy-
pothesi erit vt GF. ad FE. ita GI. ad IE. & vt GI. ad IE. ita 3. 6.
GB. ad BM. similia enim ostensa sunt triangula GIF. GBM.
& vt GB ad BM. ita GK. ad KM. æquales enim positi sunt 3. 6.
anguli KBG. KBM. ipsi autem KM. æqualis ostensa est EL.
erit igitur vt GF. ad FE. ita GK. ad EL. Rursus cum sit vt 3. 6.
GI. ad IE. ita GF. ad FE. erit permutando vt GI. ad GF. id
est vt BG. ad GK. ita IE. ad FE. id est BE. ad EL. & permutando 4. 6.
vt BG. ad BE. ita GK. ad EL. Cum igitur ostensum sit paulo ante esse GF. ad FE. vt GK. ad EL. & nunc esse vt
GK. ad EL. ita BG. ad BE. erit vt FG. ad FE. ita BG. ad BE. 15. 5.
& permutando, ac conuertendo, vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. Quod propositum erat demonstrare.

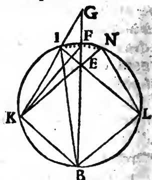
Quod si recta ducta ex G. circulum non secet, sed tangat in puncto A. sitque triangulum rectangulum BAF. cum cuius latere AF. faciant duæ AG. AE. angulos æquales GAF. FAE. Dico rursus vt BG. ad GF. ita esse BE. ad EF. Ducta enim ex centro circuli D. recta ad punctum contactus DA.

facient



faciet angulum rectum DAG. re-
18. 3. ctus autem est & BAF. quare si cō-
31. 3. munis auferatur angulus *F*AD. re-
manebunt æquales GAF. DAB.
sed ipsi GAF. ponitur æqualis
FAE. & ipsi DAB. æqualis est
5. 1. DBA. æqualis igitur est totus
GAE. duobus DAB. DBA. id est
32. 1. angulo GDA. Cum igitur duo
triangula GAD. GAE. habeant
angulum communem ad G. & angulus GAE. æqualis sit angulo ADE. etiam reliqui *G*EA. GAD. æquales erunt, rectus autem est *G*AD. igitur rectus est & *G*EA. Quare ex 2. Coroll. 25. huius erit vt B*G*. ad *G*F. ita BE. ad EF.

Denique cadat angulus rectus sub punctum contactus, vt in K. & sit triangulum rectangulum BK*F*. cum cuius latere KF. duæ rectæ K*G*. KE. faciant angulos æquales *G*KF. *F*KE.



secentque dictæ lineæ circuli peripheriam in punctis I. N. & connectantur rectæ FN. FI. ac ducatur IE. secans peripheriam in L. rursumque connectantur KB. BL. Dico rursus esse vt *G*B. ad B*E*. ita *G*F. ad F*E*. Quoniam æquales sunt an-
guli *G*KF. FKE. æquales sunt &
26. 3. arcus IF. FN. æquales igitur rectæ
29. 3. IF. FN. & anguli IF*E*. NFE. Qua-
27. 3. re cum duo triangula *E*FI. *E*FN. habeant duo latera EF. FI. duobus *E*F. FN. æqualia & angulos *E*FI. *E*FN. dictis lateri-
4. 1. bus contentos æquales & basim IE. basi *E*N. æqualem habebunt, & angulum I*E*F. angulo N*EF*. Rursus cum in trian-
27. 3. gulis KI*E*. LN*E*. angulus KI*E*. angulo LN*E*. vtpote eidem arcui KL. insistens æqualis sit, & angulus IKE. angulo NL*E*. itidem eidem arcui IN. insistens æqualis, & æqualia

latera

latera IE. EN. æqualia erunt & latera EK. EL. Quare cum in triangulis EKB. ELB. anguli KEB. LEB. æquales sint (sunt enim æquales angulis ad verticem NEF. IEF. qui modo ostensi sunt æquales) & circa eos latera BE. EK. lateribus BE. EL. æqualia erunt anguli KBE. LBE. æquales: angulo autem KBE. seu KBG. est æqualis angulus GIF. vt prima parte huius propositionis probatum est, & angulo LBE. angulus FIE. æquales igitur sunt anguli GIF. FIE. sed rectus est FIB. in semicirculo. Igitur per primam partem huius propositionis vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. & permutando vt GB. ad BE. ita GF. ad FE. Quod propositum fuerat demonstrare. 26. 6. 4. 1. 31. 3.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifestum est, si anguli GIF. FIE. ponantur æquales, angulos LBE. KBG. & arcus BL. BK. & LF. KF. etiam esse æquales, & si arcus KF. LF. & BL. BK. aut anguli LBE. KBG. ponantur æquales, sequi angulos GIF. FIE. esse æquales. Hoc enim in progressu primæ partis demonstrationis probatum est, nam semper angulus LBE. angulo FIE. & angulus KBG. angulo IFG. est æqualis: positis autem angulis LBE. KBG. æqualibus, æquales sunt arcus insistentes KF. LF. & eorum complementa KB. LB. 26. 3.

COROLLARIVM. II.

Constat præterea si anguli GKF. FKE. ponantur æquales, etiam arcus IF. FN. item arcus BL. BK. & eorum complementa LF. KF. esse æqualia. Quod vltima parte huius probatum est.

COROLLARIVM. III.

Denique si in triangulo rectangulo GAD. ex angulo recto GAD. in basim recta demittatur faciens angulum GAE. æqualem angulo ADG. rectam AE. esse perpendicularem ad basim

sim GD. hoc enim secunda parte huius probatum est, estque vna ex conuertentibus octauæ sexti elementorum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum basim secet, sitque vt composita ex basi & segmento exteriori ad sigmentum exterius, ita segmentorum interiorum remotius ab exteriori ad vicinius, efficient duæ illæ rectę cum latere trianguli circa quod ductæ sunt angulos æquales.

SINT eadem quæ priori propositione, nimirum sit triangulum rectangulum BIF. cuius basis BF. latera circa angulum rectum I. sint IF. I*B*. & ex puncto I. in basim duæ rectæ ducantur I*E*. intra triangulum IG. extra, facientes angulos *E*IF. *F*IG. & secantes basim productam in tria segmeuta externum G*F*. interna vero BE. remotins ab externo, & *E*F. vicinius ac continguum, sitque vt BG. ad GF. ita B*E*. ad *E*F. Dico angulos *G*IF. *G*IE. esse æquales. Si enim non sint æquales, sit primum *G*IF. maior quam FI*E*. & fiat FIP. æqualis ipsi *G*IF. cadatque punctum P. supra *E*. Quoniam rectus est angulus FI*B*. & æquales anguli *G*I*F*. FI*B*. erit per præcedentem vt *BG*. ad *GF*. ita *B*P. ad P*F*. sed etiam ex hypothesi



15. 5. est vt *BG*. ad GF. ita *BE*. ad *EF*. vt igitur *BE*. ad *EF*. ita *B*P. ad PF. & componendo vt *BF*. ad F*E*. ita
8. 5. *BF*. ad *F*P. æquales igitur sunt *EF*. P*F*. pars & totum: Quod est

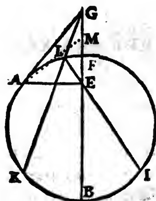
eſt abſurdum. Idem ſequetur ſi angulus *GIF.* ponatur minor angulo *FIE.* & punctum P. cadat infra *E.*

Neque aliter procedit demonſtratio in alijs caſibus, vt inducenti manifeſtiſſimum eſt. Igitur ſi in triangulo ex puncto &c. Quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI ex duobus punctis circumferentiæ circuli æqualiter a diametro remotis duæ rectæ ducantur quarum prior diametrum intra circulum, & peripheriam ſecet; poſterior per punctum vbi prior peripheriam ſecat tranſiens in diametrum extra circulum incidat, ac ex puncto interno diametri ad diametrum perpendicularis ducatur peripheriam ſecans in puncto; recta ex hoc puncto ad punctum externum diametri ducta circulum tangit.

SIT circulus FAB. cuius diameter BF. a cuius puncto B, æqualiter remota ſint I. K. in peripheria circuli, id eſt arcus BI. arcui BK. ſit æqualis & ducta IL. ſecet diametrum intra circulum in E. & peripheriam in L. & ducatur per punctũ L. recta KL. quæ producta ſecet diametrũ productam in G. denique ex E. ad diametrum BF. ducatur perpendicularis EA. circuli peripheriam ſecans in A. & connectatur AG.



Dico quod recta AG. circulum tangit in A. si enim AG. non sit tangens, sit quæpiam alia vt AM. Cum arcus KB. BI. sint æquales, constat ex 30. 3. huius Coroll. 1. & 2. si duca-
Coroll. 2. tur LF. LB. angulo BLF. existente recto angulos ELF.
25. huius. FLG. esse æquales. Igitur ex 25. huius vt BG. ad GF: ita BE. ad EF. Rursus cum tangens sit, ex hypothesi, recta MA.
15. 5. & AE. sinus rectus arcus AF. patet ex Corol. 2. 25. huius esse vt BM. ad MF. ita BE. ad EF. Igitur vt BG. ad GF. ita BM.
9. 5. ad MF. & diuidendo vt BF. ad FG. ita BF. ad FM. æquales igitur sunt GF. MF. pars & totum. Quod est absurdum. Igitur si ex duobus punctis &c. Quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

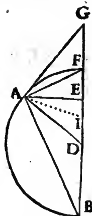
Hinc patet ratio facilis ducendi tangentem circuli ex dato puncto extra circulum, vt ex puncto G. Ducatur primum diameter GB. hinc recta GLK. vtcumque secans circulum in L. K. & auferens arcum KB. cui sumatur æqualis BI. & ex I. ducatur IL. secans diametrum in E. perpendicularis EA. ad diametrum secabit circulum in A. puncto contactus, vt ex demonstratis in ipso textu aperte constat.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

SI ex puncto vbi duo latera trianguli angulum rectum faciunt ducta recta basim bifariam diuidat, & ex eodem puncto perpendicularis ad dictam rectam, basim extra triangulum secet, atque à sectionis puncto perpendiculari æqualis in basi sumatur versus triangulum datum, ea basim trianguli in ratione laterum diuidet.

SIT

SIT triangulum BAF. rectangulum ad A. vnde demittatur AD. basim BF. bifariam secans in D. & ex A. ad AD. perpendicularis ducatur AG. secans basim productam in G. ac ipsi AG. æqualis sumatur GI. Dico esse vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Centro D. distantia DB. vel DF. describatur circulus qui transibit per A. & ducatur ex A. recta EA. perpendicularis ad BF. & connectatur IA. Quoniam angulo DAB. æqualis est DBA. & angulo DBA. æqualis FAE. ob perpendicularem AE. in basim trianguli rectanguli cadentem, æquales erunt anguli DAB. FAE. At quia rectæ GA. æqualis accepta est GI. ducta AI. angulum DAE. bifariam diuidet, vt propositione 40. primi huius demonstrauimus. Ergo si æqualibus BAD. FAE. æquales addantur EAI. DAI. erunt anguli BAI. FAI. æquales. Igitur vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Quod erat demonstrandum.



Schol. 31. 3.

8. 6.

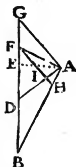
40. 1. huius.

3. 6.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI ad datam rectam infinitam à dato puncto quod in ea non sit quatuor rectæ ducantur, quarum prima & tertia, item secunda & quarta ad datum punctum angulum rectum efficiant, & cum partibus datæ quas intercipiunt triangula rectangula; à puncto autem vbi tertia basim secat quartæ parallela ducatur primæ occurrens: erit vt tota parallela ad segmentum inter basim & secundam, ita rectangulum sub vtraque basium, ad rectangulum sub segmento medio, & segmento inter extremas comprehensum.

Datum sit punctum A. à quo in datam infinitam BG. ducantur quatuor rectæ AB. AD. AF. AG. efficiantque AB. AF. item AD. AG. angulos rectos BAF. DAG. ad punctum A. ita vt sint rectangula triangula BAF. DAG. quorum bases BF. DG. latera exteriora AB. AG. interiora DA. AF. & ex puncto F. parallela ipsi GA. ducatur FI. secans AB. in I. & AD. in H. Dico esse vt IF. ad FH. ita rectangulum BG. DG. ad rectangulum BG. DF.



Quoniam angulus DAG. positione rectus
29. 1. est, erit etiam FHA. rectus, sed rectus
8. 6. etiam est positione IAF. æquiangula igitur
4. 6. sunt triangula IFA. AFH. estque vt IF. ad FA. ita AF. ad
17. 6. FI. ideoque æquale est quadratum AF. rectangulo IFH. Rursus quia similia sunt triangula GBA. FBI. (ob angu-
29. 1. lum communem ad B. & externos BFI. BIF. æquales
4. 6. internis BGA. BAG.) erit vt GA. ad FI. ita GB. ad BF. & conuertendo vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & ob eandem causam in triangulis æquiangulis DAG. DHF. est vt GA ad FH. ita GD. ad DF. Cum ergo sit vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit

FI.	GA.	FH.	
BF.	GB.	GD.	DF.

3. 3. huius. ex 3. 3. huius vt FI. ad FH. ita rectangulum BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Quod propositum erat demonstrare.

COROLLARIVM. I.

Hinc etiam efficitur esse vt rectangulum BGD. ad rectangulum BFD. ita Quadratum GA. ad quadratum FA. cum enim ex demonstratis in propositione sit vt GA. ad FI. ita GB. ad BF. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit proportio composita ex GA. ad FI. & ex GA. ad FH. eadem quæ composita ex GB. ad BF. & GD. ad DF. sed ratio composita ex GA. ad

ad FI.& GA.ad FH.est eadem quæ quadrati GA. ad rectangu- 23. 6.
lum IFH. id est ad quadratum FA. (quod rectangulo IFH.
in propositione demonstratum est æquale) composita vero ex 23. 6.
ratione GB. ad BF. & ex GD. ad DF. est eadem quæ rectan-
guli BGD. ad rectangulum BFD. vt ergo rectangulum BGD. ad
rectangulum BFD. ita quadratum GA. ad quadratum FA.

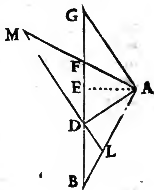
COROLLARIVM. II.

QVod si DA. DF. fuerint æquales, & descendat in BG.
perpendicularis AE. erit vt FB. ad BE. ita rectangulum
BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Nam quia æquales
sunt DA. DF. æquales erunt anguli EFA. HAF. recti autem sunt
& anguli ad EH. igitur similia sunt triangula FEA. id est AEB. 5. 1.
& AHF. id est IHA. Vt igitur IH. ad HA. ita FE. ad EA. & 8. 6.
vt AH. ad HF. ita AE. ad EB. ergo ex æqualitate, & componen- 4. 6.
do, vt IF. ad FH. ita FB. ad BE. sed vt IF. ad FH. ita rectangu-
lum BF. DG. ad rectangulum BG. DF. vt in propositione proba-
tum est: vt igitur FB. ad BE. ita rectangulum BF. DG. ad rectan-
gulum BG. DF.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

FAciant rursus rectæ AB AF. & rectæ DA. AG. in datam BG. cadentes ex dato puncto A. angulos rectos BAF. DAG. & ex puncto D. vbi secunda basim secat quartæ parallela ducatur L. M. secans primam AB. in L. & tertiam AF. in M. Dico esse vt LD. ad DM. ita rectangnlum BD. GF. ad rectangulum BG. FD.

NAM quia ob parallelas LD. AG. similia sunt triangula BLD. BAG. erit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. Rursus



fus quia ob parallelas AG. DM. fimilia funt triangula DFM. GFA. erit vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. cum igitur fit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. & vt AG.
3.3. huius. ad DM. ita GF. ad FD. erit ex 3.

LD.	AG.	DM.	
BD.	BG.	GF.	FD.

3. huius vt LD. ad DM. ita rectangulum BD. GF. ad rectangulum BG. FD. Quod erat demonftrandum.

COROLLARIVM. I.

Hinc facile deducitur effe vt quadratum GA. ad quadratum DA. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. nam cum oftenfum fit effe vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. erit conuertendo vt AG. ad LD. ita BG. ad BD. fed eft etiam vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. erit ergo proportio compofita ex AG. ad LD. & AG. ad DM. eadem qua compofita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. fed ratio compofita ex AG. ad LD. &
23. 6. *AG. ad DM. eft ratio quadrati AG. ad rectangulum LDM.*
23. 5. *& ratio compofita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. eft ratio rectanguli BGF. ad rectangulum BDF. igitur vt quadratum AG. ad rectangulum LDM. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. fed rectangulo LDM. eft aequale quadratum AD. (Nam cum parallelae fint DM. AG. & rectus fit angulus DAG. ex hypothefi rectus erit MDA. fed etiam pofitione rectus eft*
8. 6. *LAM. Igitur fimilia funt triangula LDA. DAM. & vt LD.*
4. 6. *ad DA. ita DA. ad DM. quare rectangulum LDM. quadra-*
17. 6. *to AD. aequale eft) vt ergo quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF.*

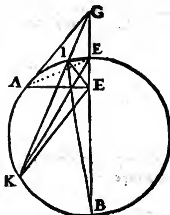
COROL-

COROLLARIVM. II.

QVod si DA. DF. fuerint æquales, & descendat ex A. in GB. perpendicularis AE. Erit vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. Nam cum æquales sint DA. DF. æquales erunt anguli DAF. DFA. Quare cum in triãgulis rectangulis AEF. ADM. æquales etiam sint anguli DAM. EFA. similia erunt triãgula FEA. id est AEB. & triãgula ADM. id est LDA. Igitur vt LD. ad DA. ita FE. ad EA. & 8. 6.
vt DA. ad DM. ita EA. ad EB. ergo ex æquali, vt LD. ad DM. ita 4. 6.
FE. ad EB. sed vt LD. ad DM. ita ostensum est rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. igitur vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. FG.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVI.

SI ex punctis diametri, ex quibus ad circumferentiam tangens, ac sinus rectus eiusdem arcus ducuntur, duæ aliæ rectæ peripheriam vbilibet in eodem puncto secent: habebit ea quæ ex puncto tangentis, ad eam quæ ex puncto sinus recti ducitur eandem rationem, quam tangens ad sinum rectum.



SIT circulus FAB. cuius diameter BF. arcus quilibet AF. cuius tangens AG. secans diametrũ productam in G. & sinus rectus AE. secãs diametrũ in E. sumatur quodlibet punctum I. in peripheria, & ducatur GI. EI. Dico esse vt GA. ad AE. ita GI. ad

IE.

IE. cadat primo punctum I. inter A. & F. & connectatur
31. 3. Coroll. 2. IF. Constat primo angulum FIB. in semicirculo rectum
25. huius. esse, Deinde manifestum est ex Corollario 2. 25. huius esse vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. & permutando ac conuertendo, vt BG. ad BE. ita GF. ad EF. Igitur, ex proposit. 31.
31.3. huius. huius, erit angulus GIF. æqualis angulo FIE. Ergo vt GI.
3. 6. Coroll. 2. ad IE. ita GF. ad FE. sed etiam ex Coroll. 2. 22. huius
22. huius. 11. 5. est vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Igitur vt GI. ad IE. ita est GA. ad AE. Quod primo propositum erat.

Sed punctum assumptum in peripheria non sit inter F. & A. sed cadat inter A. & B. vt in K. & ducantur KE. KG. Itemque connectatur KF. Eodem modo quo prius, ostendemus cum angulus FKB. in semicirculo sit rectus, & sit vt GB. ad BE. ita GF. ad FE. angulum GKE. bifariam diuidi recta KF. erit igitur vt prius, vt GK. ad KE. ita GF. ad FE. & vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. ac proinde vt GK. ad KE. ita GA. ad AE.

Cadat denique punctum assumptum in punctum, vbi diameter circululum secat, ac primum quidem in B. ac du-
Coroll. 2. cantur BG. BE. Dico esse vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Est
25.3. huius. enim ex Corollario 2. 25. huius vt BG. ad GF. ita BF. ad GF. & permutando vt BG. ad BE. ita GF. ad FE. sed vt
Coroll. 2. 22.3. huius. FE. ad FE. ita GA. ad AE. ex Coroll. 2. 22. 3. huius. Igitur vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Quod si punctum assumptum sit B. Iam probatum est Coroll. 2. 22. 3. huius esse vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Quare si ex punctis diametri &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

11. 5. *Hinc sequitur esse vt EI. ad IG. ita EK. ad KG. nam duæ illæ proportiones, proportioni EA. da AG. eadem sunt demonstrata.*

CO-

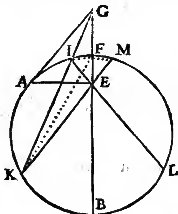
COROLLARIVM. II.

Constat etiam angulos EIG. EKG. à rectis IF. KF. bifariam diuidi.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI ex quolibet puncto peripheriæ ad puncta diametri in qua incidunt tangens ac sinus dati arcus, duæ rectæ ducantur circuli peripheriam in duobus punctis secantes; interceptæ inter puncta assumpta in peripheria & diametro, ad interceptas inter punctum diametri, & punctum sectionis in peripheria sunt in eadem ratione.

SIT circulus FAB. in quo arcus AF. cuius tangens GA. sinus rectus AE. incidentes in diametrum BF. productam; sumatur quodlibet punctum K. in peripheria, ex quo ad puncta G. E. ducantur rectæ KG. KEM. secantes, peripheriam illa in I. hæc in M. Erit KG. intercepta inter punctum assumptum K. & punctũ G. in diametro; IG. vero intercepta inter punctum sectionis I. & punctum G. in diametro, recta vero KE. erit intercepta inter



punctum assumptum K. & punctum E. in diametro, & EM. inter M. punctum sectionis, & punctum E. Dico esse vt KG. ad GI. ita KE. ad EM.

Cadat primo punctum assumptum inter puncta A. B. in

36.3.huius. Coroll. 2. K. & iungantur IF. FM. EI. Quoniam æquales sunt anguli GKF. FKE. æquales erunt & arcus IF. FM. quibus insistũt,
29. 3. 26. 3. æquales igitur & chordæ IF. FM. & æqualia complementa IB. MB. arcuum IF. FM. quare æquales quoque IFE. EFM. illis insistentes cum igitur duo triãgula IFE. MFE. habeant circa angulos æquales IFE. EFM. duo latera EF. FI. duobus EF. FM. æqualia, erunt & bases IE. EM. æquales. Insu-
4. 1. per cum sit vt GK. ad KE. ita GI. ad IE. ex Coroll. 2. præ-
Coroll. 2. 36. huius. cedentis, erit permutando vt GK. ad GI. ita KE. ad IE. id est ad EM. quæ ipsi IE. ostensa est æqualis.

Sit secundo punctum assumptum inter puncta AF. videlicet in I. & ducantur GIK. IEL. Dico rursus esse vt IG. ad GK. ita IE. ad EL. Nam cum æquales sint anguli ad verti-
27. 3. cem E. in triangulis IEK. MEL. & anguli KIE. LME. eidem arcui KL. item anguli MLE. IKE. eidem arcui IM. in-
26. 1. sistentes; itemque æqualia latera IE. EM. vt modo probatum est, æqualia erunt & latera KE. EL. Iam vero cum sit
Coroll. 1. 36. huius. vt IG. ad IE. ita GK. ad EK. ex Corollario 1. præcedentis propositionis, erit permutando vt IG. ad GK. ita IE. ad EK. id est ad EL. quæ ipsi EK. probata est æqualis.

Sit denique punctum assumptum in diametro, vt in B. vel
Coroll. 2. 25.3. huius. F. ac primo in B. Constat ex Coroll. 2. 25. huius esse vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. Quod si punctum assumptum sit in F. manifestum est, pe rationem identitatis esse vt FG. ad GF. ita FE. ad EF. Quod erat &c.

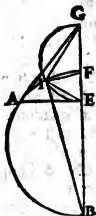
THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XXXVIII.

Iisdem positis: si circa EG. circulus describatur secans circulum FAB. in I. & ducantur IG. IF. IE. IB. Dico tres angulos GIF. FIE. EIB. esse inter se, ac singulos æquales semirecto.

Rur-

Rectus enim est vterque angulorum BIF. GIE. in semicirculo: æqualis item est GIF. angulo FIE. ex 36. huius; vterque igitur semirectus est, ergo & semirectus reliquus EIB. anguli recti FIB. Igitur æquales ac semirecti sunt tres anguli GIF. FIE. EIB. Quod erat propositum.

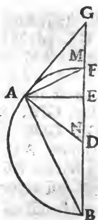
31. 3. Coroll. 1. 36. 3. huius.



THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

QVadratum tangentis arcus quadrante minoris, ad quadratum sinus totius rationem habet quam rectangulum sub aggregato sinus totius & secantis, & sub aggregato differentiæ secantis & dupli sinus versi, ad rectangulum sub aggregato sinus totius & dupli sinus complementi, & sub sinu toto.

SINT eadem quæ superiori propositione. Sed ipsi ED. nimirum sinui complementi arcus AF. æqualis sumatur EM. versus G. & sinui verso EF. æqualis EN. versus D. erit GN. aggregatum ex differentia secantis GF. & duplo sinus versi FE. EN. & MN. aggregatum ex sinus complementi ME. id est ED. & sinu verso EF. ideoque MN. æqualis sinui toto DF. & BG. aggregatum ex sinu toto BD. &



secante DG. Denique BM. aggregatum ex BD. sinu toto & DE. EM. duplo sinus complementi. Dico esse vt quadratum GA. ad quadratnm AD. ita rectaugulum BGN. ad rectangulum BMN. Quoniam rectangulum
8.& 17.6. GED. est æquale quadrato AE. & rectangulum BEF. eidem quadrato AE. æqualia erunt rectangula GED. BEF. vt in progressu. 22. huius demonstratum est, id est
14. 6. rectangula GEM. BEN. ergo vt BE. ad EG. ita ME.
12. 5. ad EN. & sumptis antecedentibus, simul & consequentibus simul, vt tota BM. ad totam GN. ita ME. ad EN. & conuertendo vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Rursus quoniam rectangulum BEN. rectangulo GEM.
14. 6. æquale est, erit vt BE. ad EM. ita GE. ad EN. & sumptis antecedentibus simul, & consequentibus simul, vt tota BG. ad totam NM. ita GE. ad EN. erat au-
12. 5. tem vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Quare proportio composita ex rationibus BG. ad NM. & GN. ad BM. eadem est ei quæ componitur ex rationibus GE. ad
3. 3 huius. EN. & EN. ad ME. Igitur ex 3. huius vt GE. ad

BG.	NM.	GE.	EN.
GN.	BM.	EN.	ME.

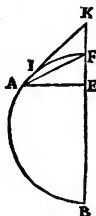
ME. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Sed vt GE. ad ME. ita GE. ad ED. (cum positæ sint æquales EM. ED) & vt GE. ad ED. ita quadratum GA. ad quadratum AD. (nam quadrato AG. æ-
8. & 17. 6. quale est rectangulum DGE. & quadrato AD. rectangulum GDE. & posita communi basi DG. rectangula
1. 6. DGE; GDE. sunt vt altitudines GE. ED. Quare etiam Quadrata AG. AD. sunt vt GE. ED.) Igitur vt Quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Quod erat propositum.

THEO-

THEOREMA XL. PROPOS. XL.

SI à puncto in quo diameter peripheriam circuli ſecat in ipſa diametro æquales partes ſumantur altera extra circulum, altera intra; & à puncto extra circulum in peripheriam tangens, à puncto intra ſinus ducatur arcum ſecans; Quadrata tangentis, & ſinus poſterioris arcus ſimul ſumpta ſunt dupla quadrati chordæ eiuſdem arcus.

Circulum FAB. ſecet diameter in F. puncto, à quo æquales ſumantur FE. FK. illa intra, hæc extra circulum, & tangat KI. circulum in I. & EA. perpendicularis ad BF. ſeu ſinus arcus FA. ſecet circulum in A. & ducatur chorda AF. Dico quadrata HI. & AE. ſimul eſſe dupla quadrati AF. Æquale
enim eſt quadratum KI. re- 36. 3.
ctangulo BGF. & quadratum 8.& 17. 6.
FA. rectangulo BFE. & qua-
dratum EA. rectangulo BEF. 8.& 17. 6.
rectangulorum autẽ BKF.BFE.
BEF. æqualis eſt altitudo FK.
FE. FE. ex hypotheſi, ſunt 1. 6.
igitur inter ſe vt baſes BK. BF. BE. quare etiam quadrata KI. FA. EA. ordine ſunt vt rectæ BK. BF. BE. Sed rectæ BK. BF. BA. ſunt in proportionalitate Arithmetica, cum æquales ſint earum diffe-



8.3.huius. differentiæ EF. FK. Igitur etiam, ex 8. 3. huius quadrata KI. FA. EA. sunt in proportionalitate Arithmetica, quare quadrata KI. EA. simul sumpta sunt dupla quadrati FA. vt in Schol. proposit. 7. 3. huius probatum est.

7.3.huius. Schol. proposit. 2.

FINIS LIBRI III.

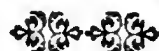


CVRVI



CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER QVARTVS.

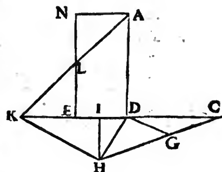


THEOREMA I. PROPOS. I.

SI trianguli amblygonij angulum obtusum duas tertias duorum rectorum continentem recta secans faciat cum minori latere angulum rectum, & ex basi auferat partem æqualem minori lateri: erit maius latus maior duarum mediarum proportionalium, quæ inter minus latns & eius duplum sumi possunt.

SIT triangulum amblygorium HDC. cuius maius latus DC. minus DH. quibus contentus angulus obtusus HDC. contineat duas tertias duorum rectorum, & ducta ex D. recta DG. ad HD. perpendicularis auferat ex basi HC. rectam GC. æqualem rectæ DH. Dico latus DC. esse maiorem duarum mediarum proportionalium quæ inter latus DH. & eius duplum duci possunt. Producatur CD. quamtumlibet in K. & ducta ex D. ad CD. perpendiculari DA. quæ sit dupla ipsius DH. Item DE. æquali ipsi DH. id

est medietati ipsius DA. compleatur parallelogrã DANE. diuisoque latere EN. bifariam in L. ducta ALK. secet CD. productam in K. & connectatur KH. Denique ex H. ad CH. perpendicularis ducatur HI. Cum
13. 1. angulus HDC. sit duæ tertiæ duorum rectorũ, erit reliquus HDI. vna tertia duorum rectorũ,



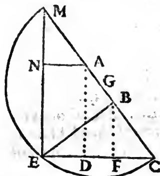
id est duæ tertiæ vnius recti. ideoque HD. id est DE. dupla ipsius DI. Itemque cum angulus HDC. sit duæ tertiæ duorum rectorum id est quatuor tertiæ vnius recti, dempto HDG. recto id est tribus tertijs vnius recti remanet GDC. vna tertia vnius recti. Rursus cum in triangulus KEL. ALN anguli ad E. N. sint recti, item anguli ad verticem L. & la-
26. 1. tera adiacentia EL. LN. sint æqualia, æqualia erunt latera
38. 1. KE. NA. id est KE. ED. est igitur KD. dupla ipsius ED. id est ipsius DH. quæ posita est ipsi ED. æqualis. Cum ergo sit etiam HD. dupla ipsius DI. erit vt KD. ad DH. ita HD.
6. 6. ad DI. æquiangula igitur sunt triangula KDH. HDI. angulus igitur DHK. rectus est, æqualis nempe angulo HID. & angulus HKD. æqualis angulo IHD. est vna tertia recti, ideoque æqualis angulo GDC. qui ostensus est vna tertia
28. 1. recti: parallelæ igitur sunt KH. DG. Quare ex ijs quæ demonstrata sunt à Nicomede apud Pappum Alexandrinum lib. 3. collectionum mathematicarum prop. 5. & Eutocium in 2. de sphera & cylindro Archimedis patet latus maius DC. esse maiorem ex duabus medijs proportionalibus positis inter DH. minus latus, & rectam DA. duplam lateris DH. Quod erat demonstrandum.

THEO-

PROBLEMA I. PROPOS. II.

TRiangulum rectangulum conſtituere, ac parallela ad minus latus ita ſecare vt quatuor ſegmenta ſint in continua ratione.

Ducatur recta MC. vtcumque, quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione: eademque diuiſa bifariam in G. deſcribatur ſemicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. ſecans ſemicirculum in E. & connectantur ME. CE. ipſique BC. accipiatur æqualis MA. & ex A. ad ME. ducatur perpendicularis AN. Dico factum eſſe quod proponebatur; nempe triangulũ MEC. 31. 3.
rectangulum ad E. ita diuiſum recta NA. parallela ad EC. (quod minus eſſe latus mox oſtendemus) vt ſit velut AC. ad NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Ducantur ad EC. perpendiculares AD. BF. Quoniam eſt vt CM. ad MB. ita MB. defin. 3. 6. 8: 6.
ad BC. erit MB. media proportionalis inter CM. BC. ſed e- 9. 5.
tiam CE. eſt media proportionalis inter CM. BC. æquales 7. 5. 8. 6.
igitur ſunt CE. MB. Quare vt EM. ad MB. ita EM. ad EC. 19. 1.
ſed vt EM. ad MB. ita CM. ad ME. vt igitur CM. ad ME. ita
ME. ad EC. maior autem eſt baſis CM. latere ME. igitur e- 14. 5.
tiam maius eſt latus ME. latere EC. Rurſus quoniam acceptæ ſunt æquales MA. BC. addita communi AB. erunt MB. AC. æquales, æqualis autem eſt MB. ipſi EC. vt modo probatum eſt: igitur etiam æqualis eſt AC. ipſi EC. Et MC. etiã
in A. ſecta eſt extrema ac media ratione, cum ſit vt CM. ad 7. 5
MA. ita CM. ad CB. quæ quidem CB. minus eſt ſegmentum ex hypotheſi. Cum vero in triangulis MNA. BFC. rectangulis ad N. & F. & æquiangulis ob parallelas NA. EC. æqua-



26. 1. les sint bases BC. MA. ex hypothesi, æqualia erunt latera FC. NA. & BF. MN. inter se. Iterum quoniam recta MC. secta est extrema ac media ratione in B. & A. erit tam MB. quam AC. maius segmentum, & tam MA. quam BC. mi-
Schol. 5. 13. nus: detracto igitur MA. ex MB. remanebit maius segmentum MB. sectum extrema ac media ratione in A. eritque AB. minus, MA. maius segmentum. Quare cum æquales sint BC. BA. ipsis MA. AB. etiam AC. secta erit extrema ac media ratione in B. Igitur in triangulo rectangulo ADC. ipsi MEC. simili similiterque posito basis AC. secta est extrema ac media ratione in B. ideoque erit DC. ipsi BC. id est ipsi MA. æqualis (Nam cum similia sint triangula ADC. MEC. in quibus bases MC. AB. similiter sectæ in A. B. sitque AC. ipsi EC. æqualis, erit etiam BC. ipsi CD. æqualis ex regulis proportionum) Erit igitur vt CA. ad AD. seu ad NE. ita
34. 1. AD. seu NE. ad DC. (cum enim similia sint triangula MEC. ADC. sitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CA. ad AD. ita AD. ad DC.) nempe ad CB. id est ad AM. quæ partim probatæ, partim sumptæ sunt æquales:
4. 6. sed est etiam vt CA. ad AD. ita AM. ad MN. ergo vt EN.
11. 5. ad AM. ita AM. ad MN. probatum igitur est esse vt CA. ad NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Quare triangulum rectangulum constitutum est &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, si recta diuidatur extrema ac media ratione, super qua constituatur triangulum rectangulum à cuius angulo recto perpendicularis ad basim incidat in sectionem, esse vt basim ad maius, ita maius latus ad minus. Probatum enim est in propositione, in qua hac effecta sunt, esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC.

COROL-

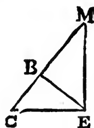
COROLLARIVM. II.

Conſtat etiam iiſdem poſitis maius ſegmentum baſis, minori lateri eſſe æquale. Demonſtratum namque eſt ſegmentum MB. lateri EC. eſſe æquale.

THEOREMA II. PROPOS. III.

SI in triangulo rectangulo ſit vt baſis ad maius latus, ita maius latus ad minus; demiſſa ex angulo recto perpendicularis in baſim ſecat eam extrema ac media ratione & maius ſegmentum minori lateri eſt æquale.

Repetatur figura propoſitionis præcedentis ac in triangulo rectangulo ad E. ſit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. ſitque EB. ex angulo recto E. perpendicularis ad baſim MC. Dico MC. ſectam eſſe in B. extrema ac media ratione, & ſegmentum MB. lateri EC. eſſe æquale. Cum enim ſit ME. ad EC. vt CM. ad ME. ex hypotheſi, & vt CM. ad ME. ita ME. ad MB. erit vt ME. ad EC. ita ME. ad MB. 8. 6.
æquales igitur ſunt EC. & MB. quod ſecundo proponebatur. Rurſus quoniam 9. 5.
æquales ſunt EC. MB. erit vt MC. ad CE. 7. 5.
ita MC. ad MB. ſed vt MC. ad CE. ita EC. id eſt MB. ad 8. 6.
BC. vt igitur MC. ad MB. ita MB. ad BC. Quod primo propoſitum fuerat.

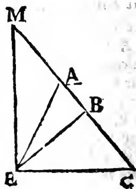


THEOREMA III. PROPOS. IV.

SI in triangulo rectangulo tria latera ſint continue proportionalia, baſiſque ſecetur extre-

ma ac media ratione, sitque maius segmentum maiori lateri contiguum recta: ex angulo recto in sectionem demissa est ad basim perpendicularis.

SIT in triangulo rectangulo ad E. vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & diuisa MC. in B. extrema ac media ratione ducatur EB. & sit MB. maius segmentum maiori lateri ME. contiguum. Dico EB. ad MC. esse perpendicularem. Si
3. huius. enim non, sit quæpiam alia EA. perpendicularis ad basim MC. erit ex præcedenti CM. secta in alio puncto vt in A. extrema ac
3. defin. 6. media ratione, sed etiam secta est
17. 6. in B. extrema ac media ratione, ergo vt CM. ad ME. ita MB. ad BC. estque quadratum MB. rectangulo MCB. æquale eodem modo erit quadratum MA. rectangulo MCA. æquale, sed rectangulum MCA. maius est rectangulo MCB. ergo quadratum MA. quadrato MB. erit maius, pars toto. Quod est absurdum.



PROBLEMA II. PROPOS. V.

TRiangulum rectangulum constituere cuius tria latera, & basis ab angulo recto ad basim sint continue proportionalia.

Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione; eadem bifariam diuisa in G. describatur semicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. & connectantur ME. EC. Dico factum esse quod

THEO-

proponebatur, nempe esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & EC. ad EB. Ac primo quidem esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. patet ex Corollario primo præcedentis. Quod vero sit vt ME. ad EC. ita EC. ad EB. probatur, est enim vt ME. ad EC. ita CM. ad ME. ex dicto Corollario, sed vt CM. ad *ME*. ita CE. ad EB. ergo vt *M*E. ad EC; ita EC. ad EB. Igitur triangulum rectangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

Coroll. 1. 2. 4. huius.

8. 6.

M A G B E C

COROLLARIVM.

Manifestum etiam est in eodem triangulo minus segmentum BC. esse quatuor rectis CM. ME. EC: EB. quinto loco proportionale: Cum enim triangulum EBC. triangulo CME. sit simile, sitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CE. ad EB. ita EB. ad BC. 8. 6.

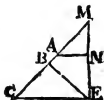
THEOREMA IV. PROPOS. VI.

SI trianguli rectanguli cuius tria latera sunt continue proportionalia latus maius proportionaliter sectum fuerit: erit maius segmentum perpendiculari ab angulo recto ad basim ductæ æquale.

Trian-

Trianguli MEC. rectanguli ad E. tria latera CM. ME. EC. sint continue proportionalia, a cuius angulo E. in basim CM. perpendicularis ducta sit EB. erit CM. in B. secta proportionaliter, seu extrema ac media ratione, minusque segmentum erit CB. maius BM. sumatur MA. æqualis ipsi CB. erunt CA. MB. æquales ideoque AC. maius segmentum MA. minus lineæ MC. proportionaliter diuisæ. Ducatur AN. parallela ipsi CE. cum sit vt CA. ad AM. ita EN. ad NM. erit EM. secta in N. proportionaliter, cuius maius segmentum EN. minus NM. Dico EN. esse æqualem ipsi EB. Nam vt ME. ad EB. ita MC. ad CE. & vt MC. ad CE. ita MC. ad MB. (æquales enim sunt EC. MB. ex Scholio 2. 4. huius) & MC. ad AC. (nam æquales ostensæ sunt AC. MB.) & vt MC. ad AC. ita ME. ad EN. ergo à primo ad vltimum vt ME. ad EB. ita ME. ad EN. æquales igitur sunt EB. EN. Quod erat demonstrandum.

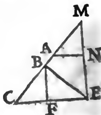
Coroll. 1. 2. 4. huius. — 2. 14. — 8. 6. — 3. 4. huius. — 4. 6. — 9. 5.



COROLLARIVM.

Ex dictis facile demonstrari potest rectas etiam NA. AB. esse æquales. Ducta enim ad EC. perpendiculari BF. cum duo triangula CEM. EBC. similia sint, & similiter secta in F. B. sitque MB. æqualis ipsi EC. erit EF. æqualis ipsi BC. si igitur ex æqualibus EC. CA. auferantur æquales EF. CB. remanent æquales FC. AB. sed ipsi FC. est æqualis NA. (nam in triangulis æquiangulis BFC. MNA. etiam latera MA. BC. sunt æqualia ideoque & reliqua NA. FC.) æquales igitur sunt AB. AN.

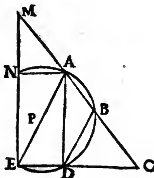
8. 6. — 26. 1.



THEOREMA V. PROPOS. VII.

SI intra triangulum rectangulum rectæ ab eodem puncto basis ad vtrumque latus perpendiculares ducantur, circa quas descriptus circulus in basi æqualem minori perpendicularium interius comprehendat, exterius duas partes æquales rlinquat: secabitur basis à circnlo extrema ac media ratione, eruntque tria latera trianguli in continua ratione.

Intra triangulum rectangulum MEC. à puncto basis A. ducantur duæ AN. AD. perpendiculares; illa ad maius latus ME. ista ad minus EC. & descriptus circulus NAB. centro P. circa parallelogrammum NADE. abscindat ex basi MC. interius rectam AB. æqualem ipsi AN. & rectæ AM. BC. sint æquales. Dico basim MC. sectam esse, tam in A. quam in B. extrema ac media ratione: Itẽque esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Connectantur BD. AE. Quoniã æquales sunt NA. ED. 34. 1.



item NA. AB. ex hypothesi, æquales erunt ED. AB. parallelæ igitur sunt AE. BD. (Nam cum æquales sint arcus ED. 28. 3.
AB. addito communi BD. æquales erunt arcus EB. AD. 27. 3.
ideoque æquales anguli AED. EAB. & eodem modo anguli EDB. ABD. probantur æquales, sunt autem anguli AED. 22. 3.
ABD. æquales duobus rectis, igitur AED. EDB. sunt æquales duobus rectis, ac propterea AE. BD. parallelæ) igitur vt 28. 1.
AB. ad AC. ita ED. ad EC. æquales igitur sunt AC. EC. 2. 6. 9. 5.

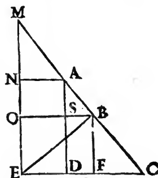
sed

sed ipsi CA. est æqualis BM; (cum enim positæ sint æquales MA. BC. addita communi BA. erunt æquales CA. BM.)
Schol. 31. 3. 31. 3. æquales igitur sunt CE. MB. Rursum cum semicirculus sit ADE. continens angulum rectum EDA. erit etiam ABE. angulus rectus. Quare cum latus minus EC. sic æquale maiori
Schol. 2. 4. huius. segmento MB. erit, ex demonstratis in superioribus propositionibus CM. secta in B. aut A. extrema ac media ratione,
Coroll. 2. 2. 4. huius. ideoque etiam ex dictis erit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA VI. PROPOS. VIII.

SI in triangulo rectangulo cuius tria latera sunt continue proportionalia à punctò basis in quod ex angulo recto perpendicularis demissa est, in latus maius perpendicularis ducatur erit illa segmento minori basis æqualis.

In triangulo rectangulo MEC. sit vt basis CM. ad latus ME. ita ME. ad EC. & ex angulo MEC. ducatur EB. ad basim MC. perpendicularis, & ex B. ad latus maius ME, perpendicularis BO. Dico BO. ipsi BC. esse æqualem. Sumatur vt in secunda huius MA. æqualis ipsi CB. & ducantur perpendiculares AN. ad ME. & AD. ad EC. secans OB. in S. Item ducatur perpendicularis BF. ad EC.
34. 1. Cum OS. NA. sint æquales itemque NA. & FC. vt 2. huius ostendimus erunt OS. FC. æquales, additis igitur æqualibus æquales erunt OB. DC. at vero æqualis est DC. ipsi BC. vt 2. & tertia huius ostensum est, æquales igitur sunt OB. BC. Quod erat demonstrandum.

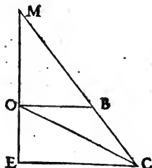


THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. IX.

SI angulum obliquum maiorem in triangulo rectangulo cuius latera continue proportionalia diuidens recta secet oppositum latus extrema ac media ratione, secabit dictum angulum bifariam : & si secet bifariam secabit extrema ac media ratione.

SIT rursus triangulum MEC. in quo vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & recta CO. diuidens angulum maiorem MCE. secet oppositum latus ME. in O. extrema ac media ratione, ita vt OM. sit maius segmentum OE. minus. Dico angulum ECO. esse æqualem angulo OCM. Ducatur OB. parallela ipsi EC. erit vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. secta est autem ME. in O. extrema ac media ratione; igitur etiam MC. in B. eodem modo secta est, æqualis igitur est EC. ipsi MB. ex 3. huius. Vt igitur MC. ad CE. ita MC. ad MB. id est EM. ad MO. id est MO. ad OE. æqualis igitur est angulus ECO. angulo OCM. Quod prius erat ostendendum. 2. 6. 2. 14. 3. huius. 7. 5. 4. 6. defin. 3. 6. 3. 6.

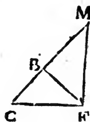


Sed rursus in triãgulo prædicto sectus sit angulus ECM. recta CO. bifariam. Dico rectam EM. sectam esse in O. extrema ac media ratione. Nam quoniam angulus ECM. sectus est bifariam erit vt MC. ad CE. id est vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. sed vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. ergo vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. sed vt CM. ad MB. ita EM. ad MO. Igitur vt MO. ad OE. ita EM. ad MO. Igitur secta est MC. in O. extrema &c. Quod erat &c. 3. 6. 8. huius. 3. 6. 4. 6.

THEOREMA VIII. PROPOS. X.

SI in triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto in basim demissa auferat segmentum æquale minori laterit: erit basis secta extrema ac media ratione, & tria latera continue proportionalia.

IN triangulo rectangulo MEC. perpendicularis EB. ex angulo recto E. ad basim MC. ducta auferat segmentum MB. æquale minori lateri EC. Dico MC. esse sectam in B. extrema ac media ratione;& esse vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Nam quoniam æquales sunt EC.MB.ex hypothesi erunt quadrata EC. MB. æqualia,sed quadra-
8.&17.6. to EC. est æquale rectangulum MCB. Igitur quadrato MB. æquale est rectan-
17. 6. gulum MCB. vt igitur CM. ad MB. ita
3.defin.6. MB.ad BC. quare MC. secta est in B. extrema ac media ratione. Quod primo erat probandum.



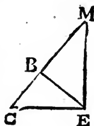
8.&17.6. Rursus quoniam quadratum EM. est æquale rectangulo CMB. ipsi autem MB. æqualis ponitur EC. erit rectangu-
17. 6. lum MCB. æquale quadrato ME. Igitur vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod secundo efficiendum erat.

THEOREMA IX. PROPOS. XI.

SI in triangulo inæqualium laterum, continue proportionalium ex angulo in oppositum latus recta ducatur illud secans extrema ac media ratione, ita vt maius segmentum maiori lateri adhærens sit æquale minori laterum: anguli

li tam ex quo recta ducta est, quam quos cum latere occurente facit, recti sunt.

Sit triangulum MEC. inæqualium laterum, ita vt sit sicut CM. ad ME. ita ME. ad EC. & ex angulo E. ducta EB. in latus MC. illud secet in B. media & extrema ratione, sitque segmentum contiguum lateri ME. æquale lateri EC. Dico angulos MEC. EBC. esse rectos. Nam quoniam recta MC. secta est in B. extrema ac media ratione, ex hypothesi, erit rectangulum MCB. quadrato MB. id est quadrato EC. (ponuntur enim æquales MB. EC.) æquale. Rursus quia ex suppositione est vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit quadratum ME. rectangulo MCE. id est CMB. æquale. Quare duo rectangula MCB. CMB. duobus quadratis CE. EM. æqualia sunt, at duobus rectangulis MCB. CMB. æquale est quadratum CM. Igitur quadratum CM. æquale est duobus quadratis CE. EM. Igitur rectus est angulus MEC. Quod primo probandum fuit.



defin. 3. & 17. 6.

17. 6.

2. 2.
48. 1.

Sed dico etiam EBC. esse rectum, seu EB. esse perpendicularem ad MC. Nam cum in triangulo rectangulo MEC. ex angulo recto MEC. ducta sit EB. ad MC. secans illud extrema ac media ratione, sintque tria latera CM. ME. EC. continue proportionalia erit FB. ad MC. perpendicularis. 4. huius.
Quod secundo demonstratione comprobandum erat.

PROBLEMA III. PROPOS. XII.

TRiangulum Isosceles describere ex cuius angulis ad opposita latera æqualia ductæ perpendiculares ea secent proportionaliter.

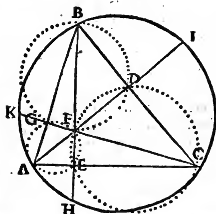
Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione, ſeu (quod idem eſt, vt à multis vſurpatur) proportionaliter: eademque diuiſa bifariam in G. deſcribatur ſemicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. ſecans ſemicirculum in E. & connectatur ME. CE. ipſique BC. accipiatur æqualis MA. atque connectatur EA. Dico triangulum ACE. eſſe Iſoſceles, cuius latera EC. AC. ſunt æqualia, & latus AC. perpendiculari EB. ſectum eſt proportionaliter. Quoniàm æquales ſunt poſitæ BC. MA. addita communi AB. æquales
3. huius. erunt MB. AC. ipſi autem MB. eſt æqualis EC. Igitur etiam ipſi AC. eſt æqualis EC. Triangulum ergo Iſoſceles eſt ACE. ſed MB. eſt maius ſegmentum lineæ MC. proportionaliter ſectæ: igitur etiam AC. eſt maius ſegmentum lineæ MC. proportionaliter ſectæ, ſed
Schol. 5. 10. BC. eſt minus ſegmentum: ergo CA. ſecta eſt extrema ac media ratione, ſeu proportionaliter in B. cuius maius ſegmentum BC. minus BA. Quare triangulum Iſoſceles deſcripſimus &c. Quod erat faciendum.

THEO-

THEOREMA X. PROPOS. XIII.

SI in triangulo oxygonio ex ſingulis angulis ad latera oppoſita perpendiculares ducantur: rectangula ſub lateribus aut perpendicularibus ac ſegmentis in idem anguli punctum deſinentibus. item ſub perpendicularium ſegmentis contenta: denique ea quæ ſub laterum ſegmentis & ijs quæ ſub perpendicularibus ex oppoſito angulo in latus cadentibus, & ſegmento perpendicularis inter punctum concurſus, & latus contento comprehenduntur rectangula æqualia ſunt.

SIT triangulum oxygonium ABC. ex cuius ſingulis angulis demittãtur ad oppoſita latera perpendiculares AD. BE. CG. quæ quidem omnes ſeſe interſecabunt in vno puncto F. vt primo à Pappo Alexandrino demonſtratum eſt lib. 7. collect. Mathemat. propoſit. 60. hinc fuſius à Io: Camillo Glorioſo, exercit. 2. Theor. 4. Dico rectangula ABG. CBD. EBF. lateribus AB. CB. perpendicularique EB. ac ſegmentis GB. DB. FB. in idem anguli punctum B. deſinentibus contenta inter ſe eſſe æqualia: item rectangula BAG. CAE. DAF. iiſdem lateribus ac ſegmentis GA. EA. FA. in punctum A. deſinentibus comprehenſa, ad hæc rectangula BCD. GCF. ACE. in punctum. C. deſinentia



nentia inter se esse æqualia: Insuper rectangula BFE. DFA. CFG. quæ segmenta perpendicularium continent, ibidem inter se esse æqualia. Denique rectangulum CDB. rectangulo ADF. & BGA. ipsi CGF. & AEC. ipsi BEF. esse æquale. Nam quoniam in quadrilatero AGFE. anguli oppositi

Schol. 22. 3. G. E. sunt recti, erit ipsum in circulo: atque eandem ob causam quadrilatera BGFD. DFEC. erunt in circulo. Circumscribantur igitur illis circuli AGFE. BGFD. DFEC. transibunt primus & secundus per eadem puncta G. F. secundus & tertius per eadem puncta F. D. primus & tertius per eadem F. E. Quare cum lineæ AC. GC. secent eundem circu-

Coroll. 1. 36. 3. lum AGFE. erunt rectangula ACE. GCF. æqualia Item quia rectæ GC. BC. secant eundem circulum GBDF. in punctis F. D. erunt rectangula sub GCF. BCD. inter se æqua-

axiom. 1. lia: quare & æqualia erunt rectangula ACE. BCD.

Eodem modo ostendemus BAG. DAF. CAE. inter se, item CBD. EBF. ABG. rectangula esse æqualia.

32. 1. 4. 6. Præterea cum æquiangula sint triangula CFE. BFG. ob angulos rectos ad E. G. & æquales ad verticem F. erit vt

16. 6. CF. ad FE. ita BF. ad FG. Quare rectangulum CFG. erit æquale rectangulo BFE. & quia æquiangula sunt triangula

1. pron. FEA. FDB. ob eandem causam erit rectangulum BFE. æquale rectangulo DFA. & ipsi CFG.

32. 1. Denique quoniam æquiangula sunt triangula DAC. FAE. ob rectos ad D. E. & comunem A. item triangula FAE. FBD. ob rectos ad D. E. & æquales ad verticem F.

4. 6. 16. 6. æquiangula erunt triangula CDA. FDB. Quare erit vt CD. ad DA. ita FD. ad DB. ergo rectangulum CDB. rectangulo ADF. æquale est. Rursus quia sunt æquiangula CGB. CDF. ob comunem angulum ad C. & rectos ad D. G. item triangula FDC. GFA. ob rectos ad D. G. & æquales ad verticem F. etiam æquiangula erunt triangula CGB. GFA. ideoque erit vt CG. ad BG. ita AG. ad GF. ergo rectangula CGF. BGA. sunt æqualia. Tandem eodem modo ex eo quod triangula CEB. EAF. sint æquiangula inter

se

se qnia æquiangula tertio ADC. ostendemus rectangulum CEA. esse æquale rectangulo BEF.

SCHOLIVM.

Hic habes quatuor coniugationes vbi terna inter se, & vnam vbi terna ternis rectangula æqualia sunt; quam propositionem non tantum triangulo æquicruri aptauimus, vt Pappus lib. 5. Coll: Math: Theor. 1. ad propositionem 25. sed etiam scaleno tam acutangulo, quam obtusangulo; nec vnum tantum casum, quod ille, sed ad octodecim demonstratione haud admodum longiore, certe multo faciliore complexi sumus. Quod si in superiori figura triangulum ABC. circulo comprehendamus, ac perpendiculares AD. BE. CG. in circumferentiam vsque producamus in puncta I. H. K. erunt earum partes extra triangulum, partibus intra triangulum latere ac puncto concursus definita æquales; nempe DI. ipsi DF. HE. ipsi EF. & KG. ipsi GF. nam rectangulo CDB. ostensum est æquale rectangulum ADF. & eidem rectangulo CDB. æquale erit rectangulum ADI. æqualia igitur sunt rectangula ADF. ADI. atque adeo æquales DF. DI. atque eodem modo probabitur æquales esse reliquas. 16. 6. Schol. 1. 6.

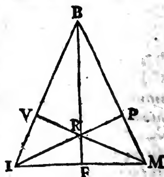
THEOREMA XI. PROPOS. XIV.

SI ex trianguli Isoscelis singulis angulis perpendiculares secent opposita latera extrema ac media ratione; rectangulum sub latere ac maiori segmento, æquale est quadtato perpendicularis in latus cadentis.

SIT triangulum Isosceles IBM. cuius latera IB. MB. æqualia, ex cuius angulis emittantur ad opposita latera perpendiculares IP. MV. & ad basim ipsam perpendicularis BF. (quæ transibunt omnes per vnum punctum R. vt supra

pra

Pappus lib. 7. Pro. 60. pra probatum est) secentur autem latera in punctis V. P.
13. huius. extrema ac media ratione sintq; segmenta maiora BV. BP. minora VI. PM. Dico rectangulum IBV. Quadrato IP. esse æquale. Nam quadratum BI. æquale
2. 2.
47. 1. est rectangulis IBV. BIV. Item quadratis BP. PI. Igitur duo triangula IBV. BIV. æqualia sunt duobus quadratis BP. PI. Rectangulo autem BIV. æquale est quadratum BV. (nam cum diuisa sit BI. proportionaliter in V. cuius maius segmentum BV. erit vt IB.

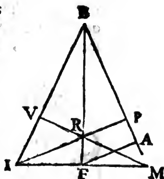


17. 6. ad BV. ita BV. ad VI. ideoque rectangulum BIV. quadrato BV. æquale est) igitur rectangulum IBV. & quadratum BV. sunt æqualia quadratis BP. PI. Quadratum autem BV. est æquale quadrato BP. (nam cum æquales sint BI. BM. & æqualiter diuisæ, erunt BV. BP. æquales) si igitur ex æqualibus, rectangulo IBV. cum quadrato BV. & duobus quadratis BP. PI. æqualia demantur quadrata BV. BP. remanent æqualia rectangulum IBV. & quadratum PI. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XV. PROPOS. XII.

SI ex trianguli Isoscelis angulis perpendiculares secent opposita latera proportionaliter : Quadrata lateris, perpendicularis ad basim; perpendicularis ad latus, erunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum dimidiæ basis; & ordine eandem habebunt rationem, quam latus, composita ex maiori segmento cum dimidio minoris, & maius segmentum.

SIT



SIT triangulum æquicrure IBM. cuius latera æqualia IB. MB. basis IM. ex cuius angulis ad opposita latera, ad basim ductæ sint perpendiculares IP. MV. BF. secantes se in puncto R. ex dictis proposit. 13. huius, & latera in punctis V. P. ita vt rectæ IB. MB. sectæ sint proportionaliter in V. P. Sintq; BV. BP. maiora segmenta. VI. PM. minora, & PA. dimidium segmenti minoris. Dico quadrata rectarum BI. BF. IP. esse in proportionalitate Arithmetica, cuius excessus sit quadratum IF. Et esse, vt quadratum BI. ad quadratum BF. & quadratum BF. ad quadratum IP. ita latus MB. ad rectam AB. compositam ex AP. medietate segmenti minoris, cum PB. segmento maiori, & hanc ad maius segmentum BP.

Connectatur AF. Quoniam PM. ex hypothesi, diuisa est bifariam in A. & IM. bifariam in F. erit vt MA. ad AP. ita MF. ad FI. ideoque parallelæ erunt AF. PI. Rursus quadratum IB. excedit quadratum BF. quadrato IF. Cum vero quadratum BF. sit æquale duobus rectangulis FBR. BFR. sit autem rectangulum FBR. æquale rectangulo IBV. ex 13. huius, & rectangulum IBV. quadrato IP. vt supra proposit. 14. probatum est, excedet quadratum BF. quadratum IP. rectangulo BFR. id est quadrato IF. quod paulo ante probatum est esse æquale rectangulo BFR. Igitur Quadrata BI. BF. IP. sunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum IF. Quod prius probandũ erat. Schol. 16. 1. | 2. 6. | 47. 1. | 2. 2. | 13. huius. | 14. huius. | 13. huius.

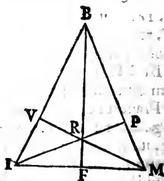
Præterea cum æquiangula sint triangula IBF. FBA. ob angulos rectos ad FA. & æquales IBF. FBA. erit vt IB. ad BF. ita BF. ad BA. igitur est vt IB. id est MB. ad BA. ita quadratum IB. id est MB. ad quadratum BF. & conuertendo. Itẽ quoniã est, vt BI. ad IP. ita IP. ad PB. vt supra ostensum est, erit vt IB. seu MB. ad PB. ità quadratũ IB. seu MB. ad quadratum IP. Quare ex æqualitate, erit etiam vt recta AB. ad Schol. 16. 1. | Coroll. 20. 1. | 2. huius. | Schol. 20. 6.

rectam BP. ita quadratum BF. ad quadratum IP. Igitur quadrata BI. BF. IP. ſe habent vt rectæ MB. AB. PB. Quod ſecundo loco oſtendendum erat.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI.

SI ex trianguli Iſoſcelis angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera proportionaliter: erit vt latus Hexagoni ad latus decagoni, ita latus ad maius ſegmentum; vt vero latus quadrati ad latus Hexagoni, ità maius ſegmentum lateris, ad ſegmentum baſis; & vt latus quadrati ad latus decagoni, ita latus ad ſegmentum baſis; denique vt latus Hexagoni, ad latus quadrati, ita maius ſegmentum lateris ad totam baſim.

SINT in eodem triangulo IBM. Iſoſcele ex angulis ſecta latera proportionaliter, modo ſæpe ſuperius inculcato. Dico eſſe vt latus Hexagoni ad latus Decagoni, ita IB. ad BV. & vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BV. ad IF. & vt latus quadrati ad latus decagoni ità BI. ad IF. denique vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV.

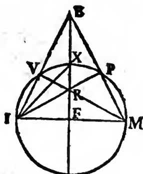


Ac primum quidem aio rectam IB. ad ſegmentum maius rationem habere quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Nam ſi componantur in vnam lineam rectam duæ IB. BV. tota recta ſecundum extre-
f. 13.

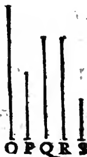
mam

mam ac mediam rationem secabitur in B. eritque IB. maius segmentum, BV. minus; quare si IB. ponatur latus Hexagoni, erit BV. latus decagoni habebuntque hæ rectæ rationem, quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Schol. 9. 13.

Secundo, centro F. distantia FM. FI. describatur circulus secans B. F. in X. & connectatur IX. Cum quadratum VB. sit æquale rectangulo BIV. (vt 14. huius probatum est) & hoc rectangulo MIF. ex 13. huius, rectangulum autem MIF. duplum est quadrati IF. erit quadratum BV. duplum quadrati IF. est autem & IX. duplum quadrati IF. æqualia igitur sunt quadrata, itemque latera VB. IX. sed IX. in circulo MXI. est latus quadrati, IF. latus Hexagoni; Igitur vt IX. latus Quadrati, ad IF. latus Hexagoni, ita BV. ad IF. 14. huius. 13. huius. 1. 6. Schol. 47. 1. 6. 4. Coroll. 15. 4.



Tertio, Assumatur linea O. æqualis ipsi BI. & P. ipsi IF. & duæ Q. R. æquales ipsis BV. XI. fiatque vt O. ad P. ita Q. seu R. ad S. statuaturque ipsa BI. seu O. semidiameter circuli, circa ipsam descripti, seu latus Hexagoni, & IF. seu P. semidiameter circuli MXI. & BV. seu Q. latus decagoni respectu semidiametri IB. quod paulo ante probatum est; & IX. seu R. latus quadrati in circulo MXI. Quoniam factum est vt O. ad P. ita Q. ad S. erit permutando, vt O. ad Q. ita P. ad S. sed O. ad Q. rationem habet quam latus Hexagoni ad latus Decagoni, vt modo probatum est, igitur P. ad S. rationem habebit, quam latus Hexagoni ad la-



tus decagoni, eritque S. in circulo cuius semidiameter est IF. seu in circulo MXI. latus decagoni in quo etiam recta R. seu IX. est latus quadrati. Sed vt Q. ad S. ita R. ad S. cum æquales sint Q. & R. habet autem R. ad S. rationem quam latus Quadrati ad latus decagoni, & vt R. ad S. ita posita est O. ad P. idest BI. ad IF. igitur vt latus Quadrati ad latus Decagoni ita O. ad P. seu BI. ad IF.

13. huius. Denique quoniam ex superioribus propositionibus rectangulum MIF. æquale est rectangulo BIV. & rectangu-
14. huius. lum BIV. quadrato BV. erit rectangulum MIF. æquale qua-
1. 6. drato BV. ideoque totum quadratum MI. duplum quadrati BV. Duplum autem est quadratum lateris quadrati, quadrato lateris Hexagoni. Igitur vt latus Quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV. Quæ omnia fuerunt demonstranda.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

Iisdem positis Basis ad minus segmentum lateris; item maius segmentum perpendicularis lateris ad minus perpendicularis basis; denique maius segmentum perpendicularis basis, ad minus perpendicularis lateris habent rationem quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

In figura superiori. Dico basim MI. ad minus segmentum lateris IV. Item maius segmentum IR. perpendicularis lateris, ad RF. minus segmentum perpendicularis basis: denique BR. maius segmentum perpendicularis basis ad RV. minus segmentum perpendicularis lateris, rationem habere quam latus quadrati ad latus Decagoni. Similia sunt triangula BIF. IMP. ob rectos ad F. & P. & æquales ad I. M. item triangula IMP. IRF. ob communem angulum

ad I. & rectos ad FP. denique triangula IRF. BRP. ob æquales ad verticem R. & rectos ad P. F. vt igitur BI. latus quadrati ad IF. latus Decagoni (vt in propositione demonstratum est) ita IM. ad MP. & IR. ad RF. & BR. ad RP. Quod fuit probandum. 4. 6. 17. huius.

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

Iisdem positis: Dico, maius segmentum perpendicularis basis BR. ad maius perpendicularis lateris RI. rationem habere quam latus quadrati ad latus Hexagoni.

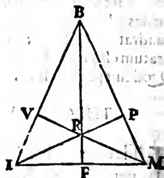
Cum enim paulo ante in prop. 17. huius ostensa sint similia triangula IFR. BPR. item similia etiam sint triangula BPR. BVR. ob æquales angulos ad B. & rectos ad PV. erit igitur vt VB. ad BR. ita FI. ad IR. & permutando vt VB. ad IF. ita BR. ad IR. sed VB. ad IF. probata est in propositione 16. habere rationem quam latus quadrati ad latus Decagoni: igitur vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BR. ad IR. Quod fuit demonstrandum. 4. 6. 16. huius.

THEOREMA XVI. PROPOS. XIX.

IN triangulo Isoscele ex cuius angulis perpendiculares secant opposita latera proportionaliter; etiam perpendiculares laterum sese proportionaliter secant, maiusque segmentum est ab angulo ad punctum contactus.

SIT rursus triangulum Isosceles IBM. quale propositum est, at superioribus propositionibus descriptum est.

Dico



Dico tam IP. quam MV. perpendiculares ſecari proportionaliter in puncto R. maiuſque ſegmentum eſſe IR. minus RP. item maius MR. minus RV.

Nam cum facta prima IM. cum ſecunda MB. angulum ad M. & ab extremitatibus primæ, & ſecundæ I. B. ductæ ſint IP. BF. tertia & quarta concurrentes in R. puncto, & ſecantes oppoſita BM. in P. & IM. bifariam in F. erit per. 19. huius vt MB. ad BP. id eſt vt BP. ad PM. ita IR. ad RP. ſed BP. eſt maius ſegmentum lineæ proportionaliter ſectæ, PM. minus. Igitur etiam IR. eſt maius ſegmentum, RP. minus lineæ IP. proportionaliter ſectæ. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI in triangulo Iſoſcele ex cuius angulis perpendiculares ſecant oppoſita latera proportionaliter, ſegmentum minus perpendicularis ad baſim duplicetur; ſecabitur aggregatum perpendicularis & minoris ſegmenti in puncto concurſus proportionaliter, cuius minus ſegmentum erit duplum minoris ſegmenti, & maius, maius ſegmentum perpendicularis.

SIT iterum triangulum Iſoſceles quale ſæpe ſuperioribus propoſitionibus delineatum eſt. Producatur perpendicularis baſis BF. in G. ſintque RF. FG. æquales. Dico

BG.



BG. sectam esse in R. proportionaliter, cuius minus segmentum GR. maius RB. Nam quia ex 18. propositione tertij huius est vt MP. ad PB. ita FR. ad medietatem ipsius RB. erit vt MP. ad PB. ita duplum FR. videlicet tota RG. ad totam RB. secta est autem MB. in P. proportionaliter, ex hypothesi, cuius minus segmentum MP. maius PB. Igitur & GB. secta est proportionaliter in R. cuius minus segmentum GR. maius RB. Quod erat demonstrandum. 18.3. huius. 15. 5.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

IN triangulo Isoscele ex cuius angulis perpendiculares secant opposita latera proportionaliter: medietas aggregati ex perpendiculari ad basim & minori eius segmento est æqualis maiori segmento eiusdem perpendicularis proportionaliter sectæ.

SIT idem triangulum Isosceles quod superiori propositione IBM. & producta FG. sit æqualis segmento FR. & connectatur PG. item PV. secans BF. in H. Cum sint æquales BP. BV. item BM. BI. parallelæ erunt MF. PH. 2. 6.
& vt BP. ad PM. ita BH. ad HF. ideoque cum BM. sit secta proportionaliter in P. sitque maius segmentum BP. minus PM. erit BF. secta proportionaliter in H. maiusque segmentum BH. minus HF. Dico HG. esse medietatem ipsius BG. aut æqualem ipsi HB. Cum enim PR. 2. 14.
ad RF. rationem habeat quam latus quadrati ad latus Hexagoni, erit quadratum PR. duplum quadrati RF. sed 16. huius.
etiam



1. 6. etiam rectangulum GRF. est duplum quadrati RF. igitur æquale est quadratum PR.
17. 6. rectangulo GRF. ergo vt GR. ad RP. ita RP. ad RF. æqui-
6. 6. angula igitur sunt triangula
4. 6. GRP. PRF. vt igitur PR. ad RF. ita GR. ad RP. sed PR.
16.huius. ad RF. rationem habet quam latus Quadrati ad latus Hexagoni igitur GR. ad RP. rationem habet quam latus Quadrati ad latus Hexagoni,
15. huius. vt vero latus Quadrati ad latus Hexagoni ita BR. ad RI. Vt igitur GR. ad RP. ita BR. ad RI. sed & æqualis est angulus ad verticem R. æquiangula igitur sunt trian-
27. 1. gula GRP. BRI. atque adeo angulus PGR. æqualis angulo IBR. id est RBM. parallelæ igitur sunt PG. BI. &
6. 1. æqualis PB. seu BV ipsi PG. ergo & parallela VG. ipsi
33. 1. defin.35. 1. BM. & parallelogrammum est BPGV. in quo se diametri PV. BG. bifariam secant in H. est igitur BH. æqualis HG. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat punctum H. esse centrum circuli circa triangulum BIM. descripti, atque eundem circulum transire per punctum G. Nam quod centrum circuli dicto triangulo circumscripti sit in recta GB. patet ex Corollario prima tertij: Quod in puncto H. constat quia recta BG. diuisa est bifariam in H, Quod circulus transeat per. G. eodem modo probatur quia ex propositione, HB. HG. sunt æquales,

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

Isdem positis. Dico aggregatum BG. ex perpendiculari BF. ad basim, & minori segmento FR. id est FG. seu diametrum circuli circũscripti triangulo BIM. ad maius segmentum perpendicularis ad latus IR. rationem habere quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

Nam si connectatur MG. erit angulus BMG. rectus; rectus autem est etiam MFG. Igitur vt BM. ad MF. id est latus quadrati ad latus Decagoni, ita BG. ad GM. id est BG. ad MR. 8. 6.
(nam cum duo triangula MFG. MFR. habeant duo latera 16. huius.
MFG. MFR. æqualia circa angulos rectos ad F. erunt bases
MG. MR. æquales) Quod erat &c. 4. 1.

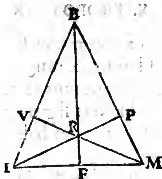
PROBLEMA IV. PROPOS. XXIII.

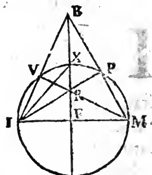
Super data basi triangulum Isosceles describere, ex cuius angulis perpendiculares secent opposita latera, in quæ incidunt, proportionaliter.

SIT data in secunda figura basis IM. super qua oportet constituere triangulum Isosceles vt propositum est. Primo sit constructum triangulum BIM. in prima figura, nulla data determinata linea, per 12. huius, in quo perpendiculares MV. IP. secent opposita latera proportionaliter, sintq; delineata ea quæ 14. huius dicta sunt. Hinc in secunda figura diuidatur IM. bifariam in F. & centro F. distantia FM. descriptus sit circulus IXM. & fiat vt latus quadrati circulo inscriptibilis ad latus decagoni ita IM. ad MP. quæ MP. in circulo aptetur ex puncto M. quæ producta secet ductam ad IM. perpendicularem FB. in B. (secabit autem eo 13. pron.
quod angulus BFM. & acutus FMB. minores sint duobus

rectis) & connectatur IB. secãs circulũ in V. itẽm MV. IP. secantes se in R. per quod trãsit & perpendicularis FB.

Schol. 13. huius.





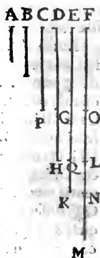
Dico in secunda figura constitutũ esse super basi data IM. triangulum Isosceles IBM. in quo perpendiculares MV. IP. secant opposita latera BI. BM. proportionaliter. Cum enim triangula IMP. BMF. habeant
31. 3. angulum communem ad M. & rectos ad F. P. (est enim BF. perpendicularis ad IM. & IPM. in semicirculo rectus) erunt æquiangula: igitur vt IM. id est latus quadrati ad MP. id est latus decagoni, ita BM. latus quadrati ad MF. latus decagoni, sed etiam est in prima figura BM. ad MF. vt latus
7. 6. quadrati ad latus Decagoni, & in vtroque angulus rectus
15. 5. BFM. ideoque reliquorum vterque minor recto: similia igitur sunt triangula FMB. atque adeo tota MBI. in vtraque figura. Sed & similiter secta sunt: Nam vt BM. ad MI. in prima, ita BM. ad MI. in secunda, vt modo ostensum est, & vt IM. ad MP. in prima, ita IM. ad MP. in secunda, igitur exæquali vt BM. ad IM. in prima ita BM. ad IM. in secunda, sed in prima secta est BM. proportionaliter in P. ergo & in secunda. Igitur super data basi &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XX. PROPOS. XXIV.

SI ex additione alterna duarum linearum quarum prima sit segmentum minus, altera maius

ius rectæ proportionaliter sectæ sex magnitudines ordine constituantur quæ ternæ ordine continuo coniugantur: prima & secunda coniugatio in medietate Geometrica; tertia in medietate quinta Geometricæ opposita; quarta in Harmonica proportionalitate consistet.

Tria sunt præcipua medietatum genera, teste Pappo Alexandrino collectionum mathematicarum libro. 3. prop. 16. Geometrica, Arithmetica, Musica, quæ maxime vtiles sunt ad antiquorum lectiones, quibus Nicomachus Pythagoreus & alij nonnulli tres addiderunt, recentiores adhuc quatuor alias: Geometrica medietas est cum tres quantitates eandem proportionem habent: Arithmetica, cum trium quantitatem eadem est differentia, de qua superius plura. Harmonica quando tres numeri ita disponuntur vt eadẽ sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos, ad differentiam inter duos minores. medietas vero quinta seu Antigeometrica, vt alias, omittamus, est cum vt tertius terminus ad secundum, ita primi excessus ad excessum secundi.



Sint igitur sex lineæ rectæ quarum prima A. sit minus segmentũ rectæ proportionaliter sectæ, secunda B. maius segmentum eiusdem rectæ eodem modo sectæ. tertia CP. constituatur ex maiori & minori segmento: Quarta DH. ex tertia & maiori segmento: quinta EK. ex quarta & minori segmento: sexta FM. ex quinta & maiori segmento: Dico si coniugentur ordine continuo ternæ A. B. CP. & B. CP. DH. & CP. DH. EK. & DH. EK. FM. tres primas A. B.

CP. item tres secundas B. CP. DH. esse in medietate Geometrica: tres vero tertiæ coniugationis CP. DH. EK. esse in medietate Antigeometrica; denique tres vltimas DH. EK. FM. esse in proportionalitate Harmonica.

defin.3.6. Primo cum recta CP. sit composita ex minori segmento A. & maiori B. constat ex definit. 3. 6. esse vt A. ad B. ita B. ad CP. Quod est esse in proportionalitate Geometrica.

5. 13. Secundo abscindatur DG. æqualis ipsi CP. quoniam recta DH. constat ex recta CP. & segmento maiori B. erunt GH. & B. æquales, & diuisa erit DH. in G. proportionaliter cuius maius segmentum DG. æquale ipsi CP. minus GH. Cum igitur B. sit positum maius segmentum rectæ CP. & recta CP. maius segmentum ipsius DH. quarum vtraque proportionaliter secatur à dictis segmentis erit ex conuertente 2. 14 vt B. ad CP. ita CP. ad DH. ideoque tres illæ rectæ in medietate Geometrica constituuntur.

defin.3.6. Tertio abscindatur EQ. æqualis ipsi DH. erit QK. differentia ipsarum DH. DK. ex suppositione, æqualis minori segmento A. & GH. differentia duarum DH. CF. iam ostensa est æqualis maiori segmento B. & CP. DG. æquales ac DG. maius segmentum rectæ DH. proportionaliter sectæ minus GH. vt igitur media HD. ad segmentum maius DG. id est ad minimam CP. ita DG. segmentum maius rectæ DH. ad GH. segmentum minus, sed etiam GH. differentia mediæ & minimæ est segmento maiori B. & recta QK. differentia mediæ & maximæ segmento minoris A. æqualis vt igitur media ad minimam ita differentia minimæ & mediæ ad differentiã mediæ & maximæ. Erit igitur conuertendo vt tertius terminus CP. ad secundum DH. ita excessus primus QK. ad secundum GH. quæ definitio est medietatis quintæ apud Pappum.

Quarto ex FM. abscindatur FN. æqualis ipsi EK. & FL. ipsi DH. & FO. ipsi DG. Quoniam LN. est æqualis ipsi QK. id est ipsi A. & NM. adiecta est æqualis ipsi B. erit tota LM. æqualis duabus A. B. id est toti CP. seu DG. maiori

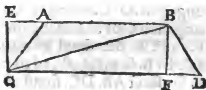
nem-

nempe segmento DH. proportionaliter sectæ id est ipsi FO. ipsi autem DH. est æqualis FL. igitur etiam FL. secta est proportionaliter in O. cumque adiecta sit LM. maiori segmento DG æqualis erit FM. secta in L. proportionaliter. 5. 13. Patet igitur esse vt FM. totam ad FL. maius segmentum, id est ad DH. minus extremum ita differentiam maiorum NM. quæ est æqualis B. maiori segmento ad QK. differentiam minorum, æqualem minori segmento A. quæ est ratio Harmonica. Quare si ex additione alterna &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXV.

Trapezium habens duo latera parallela, diuiditur à linea recta per angulos oppositos ducta in duo triangula quæ inter se eandem rationem habent quam latera opposita parallela.

Sit trapezium ABDC. cuius latera AB. CD. parallela & angulos oppositos C.B. coniungat recta CB. Dico esse vt AB. ad CD. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. producta enim recta BA. si



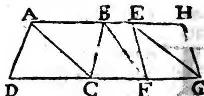
opus fuerit, aut alia ex parallelis ducatur ex C. ad CE. perpendicularis CE. item ex B. ad CD. perpendicularis BF. cũ CE. BF. sint parallelæ item BE. CF. erit ECFB. parallelogrammum: æqualia igitur latera opposita CE. FB. Triangulorum igitur BAC. BDC. æqualis est altitudo CE. BF. Est ergo vt basis BA. ad basim DC. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. Quod erat. 35. defin. 34. 1. 4. defin. 1. 6.

THEO-

THEOREMA XXII. PROP. XXVI.

TRapezia in eiſdem aut æqualiter diſtantibus parallelis ita ſe habent inter ſe, vt duo latera vnius parallela, ad duo latera parallela alterius.

Sint trapezia ABCD. BCFE. EFGH. inter eaſdem parallelas AH. DH. & diuidantur à lineis rectis DB. CE. FH. per angulos oppoſitos ductis in triangula, quæ (vt ſuperiori demonſtratur) eandem habent altitudinem. Dico eſſe vt AB. & DC. ſimul ad rectas BE. CF. ſimul ita trapezium ABCD. ad tragelium BCFE.



12. huius. Eſt enim vt recta AB. ad rectam DC. ita triangulum
18. 5. ABC. ad triangulum ADC. & componendo vt AB. DC. ſimul ad DC. ita ABC. ADC. triangula ſimul, id eſt, trape-
1. 61. zium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita
4. huius. 18. 5. triangulum ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad BE, ita triangulum CBF. ad triangulum EFB. & componendo vt CF. ad CF. BE. ſimul ita triangulum CEF. ad triangula CBF. EFB. ſimul id eſt, ad trapeziũ BCFE. cũ igitur oſtenſum ſit eſſe vt AB. DC. ſimul ad DC. ita trapezium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita trianguiũ ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad CF. BE. ſimul ita trian-
22. 5. gulum CBF. ad trapezium BCFE. erit ex æquo vt AB. DC. ſimul ad CF. BE. ſimul ita trapelium ABCD. ad trapezium BCFE.

Idem demonſtrabitur de trapezio EFGH. Quod erat &c.

COROL-

COROLLARIVM.

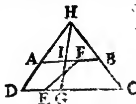
Ex demonstratis superiori propositione deducitur quod. Si Trapezium cuius duo latera parallela diuidantur linea secante vtrumque latus parallelum: erunt partes ablatæ inuicem, vt duo latera parallela vnius partis ad duo latera parallela alterius.

Si trapezium AEFD. cuius duo latera AE. DF. parallela, quæ diuidantur recta BC. Dico esse vt AB. DC. simul ad AE. DF. simul ita pars ABCD. ad partem BEFC. Hoc euidenter patet ex propositione.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVII.

SI in trapezio in quo duo latera parallela, à puncto in quo duo non parallela producta concurrunt ducatur recta, diuidens lineam rectam vtrumque latus parallelum secantem: habebunt trapezij partes eandem rationem, quam partes lateris vtriusuis paralleli à ducta linea diuisi.

Rursus trapezium ABCD. secetur recta EF. vtcumque & DA. CB. latera non parallela producantur dum coeant (ponuntur enim non parallela) in H. & diuisa recta EF. bifariam in K. ducatur recta HK. quæ producta secet latus DC. 10. 6.
in G. & latus AB. in I. Dico esse vt AI. ad IB. aut DG. ad GC. ita partem AFED. ad partem EFBC. Cum enim parallelæ sint AB. DC. easque secent EF. GI. rectæ; erit 29. 1.
in triangulo KEG. angulus KEG.



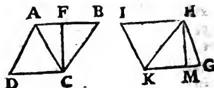
æqualis alterno KFI. in triangulo KFI. & angulus GKE. æqualis angulo FKI. ad verticē: ponitur autē FK. æqualis KE. 15. 1.
æqualia igitur sunt triangula KEG. KFI. Si igitur æquali- 26. 1.
bus

2. pron. bus triangulis KEG. KFI. addatur cõmune frustũ AIKED. erunt trapezia AIGD. AFED. æqualia. Eodem modo ostendetur trapezia BIGC. BFEC. esse æqualia. Cum autem in triangulo HDC. ducta sit lateri DC. parallela AB. & ex angulo opposito H. recta HIG. vtramque secet punctis I. G.
Schol. 4. 6. erit vt AI. ad IB. ita DG. ad GC est autem vt DG. ad GC.
1. 6. ita triangulum DHG. ad triangulum GHC. & vt AI. ad IB.
11. 5. ita triangulum AHI. ad triangulum IHB. erit ergo vt triangulum DHG. ad triangulum GHC. ita triangulum AHI. ad triangulum IHB. Cum ergo sit vt totum triangulum DHG.
19. 5. ad totum GHC. ita pars AHI. ad partem IHB. erit reliquũ trapezium AIGD. id est AFED. quod illi ostensum est æquale ad reliquum BIGC. hoc est BFEC. illi æquale, vt totum triangulum DHG. ad totum GHC. sed vt DHG. ad ad GHC. ita ostensum esse DG. ad GC. & AI. ad IB. erit igitur vt DG. ad GC. aut AI. ad IB. ita pars AFED. ad partem BFEC. Quod erat &c.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVIII.

SI duo trapezia duo latera parallela æqualia habuerint, vtrumque vtrique: erunt inter se vt altitudines.

Sint duo trapezia ABCD. HIKM. quorum latera opposita AB. DC. item HI. GK. parallela; sitque latus AB. lateri HI. & DC. ipsi GK. æquale. Dico trapelia illa inter se esse vt altitudines. Ducantur diagonij AC. HK. diuidentes trapezia in duo vtrinq; triangula, quæ, vt patet ex progressu 25. huius eandem vtrumque quam suum tra-



trapezium altitudinem habet,quæ sit illic FC.hic HM.Cum ergo duo triangula HKI. ACB. bases AB. HI. æquales habeant,erunt inter se vt altitudines FC. HM. Item quia triangula ADC. HGK. bases DC. GK.æquales habent erunt inter se vt altitudines FC. HM. ergo vt triangulum ACB. ad triangulum HKI. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK.& permutando ac componendo & iterum permutando,vt trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK, est autem probatum esse triangulũ ADC. ad triangulũ HGK. vt est altitudo FC. ad altitudinem HM.igitur vt altitudo CF.ad altitudinem HM. ita trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. Quod erat demonstrandum.

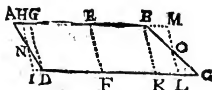
Schol. 1. 6.

11. 5.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXIX.

SI in trapezio habente duo latera parallela secto vtcumque recta linea transeunte per latera parallela abscindantur minora latera ex maioribus,& residuorum medietas accipiatur: erit vt vnum ex minoribus lateribus cum medietate sui excessus, ad alterum minus latus cum medietate eius excessus, ita pars trapezij ad partem.

Sit trapezium ABCD.cuius duo latera AB.DC. parallela, quod diuidatur vtcumque linea EF. vtrumque latus parallelum secante.Abscindatur ex parte EA.maiori quam FD. recta EG. rectæ FD. æqualis, & residuum GA. diuidatur bifariam in H. & rectæ GD. ducatur parallela HI. secans AD.in N. occurrens rectæ FD.



FI. id est ad EH. ita parallelogrammum EMLF. ad parallelogrammum EHIF. Igitur vt LF. ad FI. ita trapezium EBCF. ad trapezium EADF. Quod fuit probandum. 34. 1.

COROLLARIVM.

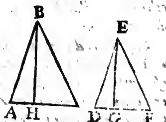
EAdem sequentur si latera AB. & DC. bifariam diuidantur, & per puncta diuisionum ducantur recta EF. parallele, vt ex demonstratione constat.

LEMMA I.

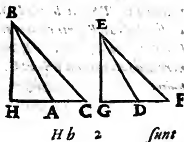
DVo triangula angulum angulo æqualem habentia, & circa angulos æquales latus vnum lateri æquale; rationem habent quam reliquum latus circa angulum æqualem ad reliquum latus.



Sint duo triangula ABC. DEF. quæ angulos A. D. æquales habeant, & latera AC. DF. æqualia. Dico esse vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF.



Sint primum triangula ABC. DEF. rectangula ad A. D. erunt AB. DE. eorum altitudines, cum igitur æquales sint AC. DF. ex hypothesi, erit vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. 1. 6.



Sint secundo triangula ABC. DEF. obliquangula, & ducantur in latera æqualia, producta si opus fuerit, perpendiculares BH. EG. Quoniam æquales ponuntur anguli BAC. EDF. & recti

32. 1. 13. 1. *sunt anguli ad HG. erunt in triangulis oxygonijs reliqui HBA. DEG. in amblygonijs BAN. EGD. aequales, quare triangula BHA. EGD. erunt aequiangula, eritque vt AB. ad BH. ita DE.*
1. 6. *ad EG. & permutando vt AB. ad DE. ita HB. ad EG. sed vt HB. ad EG. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. (cum aequales ponantur AC. DF. & perpendiculares BH. EG. sint illorum triangulorum altitudines) igitur vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. Quod erat probandum.*

LEMMA. II.

SI fuerit vt prima quantitas ad secundam ita tertia ad quartam & iterum prima ad quintam sit vt tertia ad sextam: erit prima ad secundam & quintam simul, vt tertia ad quartam & sextam simul.

Demonstratum hoc est à Guido Vbaldo, è Marchionibus montis Mathematico longe clarissimo, primo in Lemmatis ante 13. propositionem Archimedis de aequeponderantibus: hinc lib. 1. propositione 6. de Cochlea, quod nos hic ab eo mutuum sumimus, vt facilius nonnullas sequentes propositiones demonstremus.



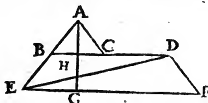
Sit vt A. ad E. ita C. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. Dico A. ad EB. simul esse, vt C. ad FD. Quoniam enim est vt A. ad E. ita C. ad F. erit conuertendo vt E. ad A. ita F. ad C. sed est vt A. ad B. ita C. ad D. ergo ex aequali vt E. ad B. ita F. ad D. quare componendo sicut EB. ad B. ita FD. ad D. Quoniam autem est A ad B. sicut C. ad F. erit conuertendo vt B. ad A. ita D. ad C. rursus igitur ex aequali vt EB. ad A. ita FD. ad C. ac tandem conuertendo A. erit ad EB. vt C. ad FD. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

SI triangulum ac trapezium duorum laterũ parallelorum angulũm vnum vni angulo æqualem habuerint, & vnum latus circa angulum æqualem vni lateri æquale: erit vt reliquũ latus trianguli circa angulum æqualem ad duo latera parallela trapezij, ita triangulum ad trapeziũ.

Habeant triangulum ABC. & trapezium BEFD. laterũ BD. EF. parallelorum angulos ad B. E. & latera AB. BE. æqualia. Dico esse vt BC. ad BD. EF. simul, ita triangulum ABC. ad trapezium BF. connectantur ED. Quoniam parallelæ sunt BD. EF. erunt anguli BEF. id est ABD. & 29. 1.
EBD. æquales duobus rectis: quare vna recta est ABE. 14. 1.
(compositis videlicet AB. BE. & BC. BD.) Ducaturque perpendicularis AHG. secans BC. ac BD. in H. & EF. in G. Quoniam



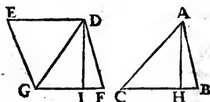
parallelæ sunt BH. EG. erit vt AB. ad BE. ita AH. altitudo 2. 6.
trianguli ABC. ad HG. altitudinem triangulorum EBD. EDF. æquales autem sunt ex hypothesi AB. BE. æquales igitur sunt etiam AH. HG. erit igitur vt BC. ad BD. ita 1. 6.
triangulum ABC. ad triangulum EBD. Rursus quia eandem habent altitudinem triangula ABC. EDF. erit vt BC. 1. 6.
ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. Cum igitur sit vt BC. ad BD. ita triangulum ABC. ad triangulũ EBD. & vt BC. ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. erit, per Lemma 2. præcedens, vt BC. ad BD. EF. Lemma 2.
simul ita triangulum ABC. ad duo triangula EBD. EDF. præcedens.
simul, id est ad totum trapezium BF. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXI.

SI triangulum ac trapezium duorum laterum parallelorum angulum vnum vni angulo æqualem habuerint: erit vt rectangnlum comprehensum sub lateribus trianguli æqualem angulum comprehendentibus, ad rectangulum contentum sub duobus lateribus trapezij parallelis tanquã vna linea recta, & latere tertio quod æquali angulo adiacet, ita triangulum ad trapezium.

Sit triangulum ABC. trapezium autem DEGF. habentia angulos ABC. DFG. æquales. Dico esse vt rectangulum ABC.ad rectangulum contentum DF.FG.simul & DF. ita triangulum ABC.ad trapezium DFGE. Ducantur perpendiculares AH. DI. & connectatur DG. Quoniam triãgulum ABC.& rectãgulum sub AH. BC. sunt inter easdem parallelas, ac ean-



41. 1. dem basim habent BC. erit rectangulum sub AH. & BC. trianguli ABC. duplum:eodem modo triangulum sub FG. DI. duplum erit trianguli FDG. & rectangulum sub DI. DE. duplum trianguli DGE. quare totum triangulum sub DI.& FG.DE.duplum est trianguli vtriusque FDG.DGE. id est totius trapezij DFGE. Hinc quoniam æquales sunt anguli ABH. DFI. & recti sunt anguli ad H. I. æquiangula
3. 6: sunt triangula ABH. DFI. erit igitur vt BA. ad AH. ita (posita communi altitudine BC.) rectangulum sub AB. BC. ad rectangulum sub AH. BC. & vt FD. ad DI. ita (posita communi altitudine vtraque DE. FG.) rectangulum sub FD. & DE. FG. simul ad rectangulum sub DI. & DE. FG.

FG. simul. Quare vt rectangulum sub AB. BC. ad rectangulum sub AH. BC. ita rectangulum sub FD. & DE. FG. simul, ad rectangulum sub DI. & DE. FG. simul, & consequentium dimidia, vt rectangulum sub AB. BC. (quod ostensum est dimidium rectanguli sub AH. BC.) ita rectangulum sub FD. & DE. FG. simul ad trapezium DEFG. (quod etiam est dimidium rectanguli sub DI. & DE. FG, simul) & permutando, vt rectangulum sub AB. BC. ad rectangulum sub DF. & DE. FG. simul, ita triangulum ABC. ad trapezium DEFG. Quod propositum fuit demonstrare. 11. 5. 15. 5.

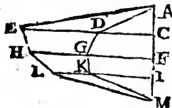
Demonstratur hoc Theorema à Pappo. Lemm. 8. in 1. Conic. Apollonij.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXII.

Sint parallelæ CE. FH. IL. quotcumque distantes æquali spatio ita vt ducta AM. secetur à parallelis in partes æquales CF. FI. sintque ijsdem partibus æquales AC. IM. & ducantur AD. DG. GK. facientes rectilineum quinque laterum ADGKI. Dico triangulum AC. ad totum rectilineum ADGKI. esse vt rectam CD. ad rectam CD. bis, ad FG. bis & rectam IK. semel.

Vt enim CD. ad CD. ita triangulum ACD. ad seipsum; 30. huius.
Rursus vt CD. ad CD. & FG. simul ita triangulum ACD. ad trapezium CG. ergo vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. & trapezium CG. Rursus quia est vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum

Lemma 2. ante. 30. huius.



ACD.

ACD. ad triangulum ACD.& trapezium CG. item est vt CD. ad FG. IK. ita triangulum ACD. ad trapezium FK.erit vt CD. ad CD. & CD. FG. & FG. IK. id est ad CD. bis FG. bis IK. semel,ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. ac trapezia CG. FK. id est ad totum rectilineum ADGKI. Quod erat demonstrandum.

Lemma 1. ante. 30. huius.

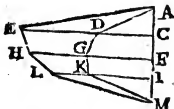
Idem continget si sit plurium laterum, semper enim quæ proportio CD. ad omnia latera duplicata præter vltimum, quod ponitur simplex ita triangulum ACD. ad omnia trapezia quæ componunt trapezium pluri laterum.

THEOREMA XXIX. PROP. XXXIII.

Retentis ijs quæ superiori propositione posita sunt: ducatur etiam KM. ita vt sit tectilineum quinque laterum incipiens à triangulo ACD. & desinens in triangulum KMI. sintque anguli ad C. I. æquales. Dico esse vt CD. ad omnia latera duplicata, nempe ad CD. bis FG. bis IK. bis, ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKM.

32. huius.

Vt enim CD. ad CD. bis FG. bis IK. semel ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKI. Itē vt CD. ad IK. ita triangulum ACD. ad triangulum IKM. (vt lemmate 1. ante 30. demōstrauimus ęquales enim sunt anguli C. I. & æquales MI. AC.) igitur vt CD. ad CD. bis, FG. bis IK. semel, & IK. semel, seu etiam IK. bis ita triangulum ACD. ad totum trapezium ADGKM. Quod erat probandum. Atque idem omnino probatum in pluribus lateribus.

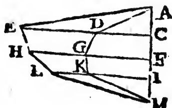


THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

PRæter ea quæ præcedenti propositione supposuimus, sit aliud trapezium AEHLI. maius priori, illudque continens.

Dico quod erit vt CD. bis FG. bis & IK. semel ad CE. bis FH. bis IL. semel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quoniam enim paulo ante demonstratum est, esse vt CD. ad CD. bis, FH. bis IK. semel, ita triangulum ACD. ad trapeziũ ADGKI. erit conuertendo vt CD. bis FH. bis IK. semel ad CD. ita trapeziũ ADGKI. ad triangulum ACD. 32. huius.

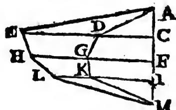


vt vero CD. ad CE. bis FH. bis & IL. semel, ita triangulum ACD. ad totum trapezium AEHLI. (hoc enim ex superioribus Lemmatis & 31. huius aperte sequitur, aut modo quo in 31. huius vsi sumus deducitur) erit igitur ex æqualitate vt CD. bis, FH. bis, IL. semel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

SInt eadem quæ in schemate superioris propositionis, & ducatur præterea LM. sintque anguli ad C. I. æquales. Dico esse vt compositam ex CD. FG. IK. ad compositam ex CE. FH. IL. ita trapeziũ ADGKM. ad trapezium AEHLM.

33.huius. Vt enim CD. ad CD. bis, FG. bis IK. bis ita triangulum ACD. ad trapezium ADGKM. & conuertendo. Item vt CE. ad CE. bis FH. bis IL. bis ita triangulum ACE. ad trapezium AEHLM. ex 33. huius; & conuertendo: erit igitur ex æquali vt CD. bis, FG. bis, & IK. bis, ad CE. bis, FH. bis, IL. bis ita trapezium ADGKM. ad trapezim AEHLM.

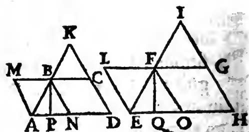


15. 5. & priorum terminorum dimidia vt CD.FG.IK.ad CE.FH. IL. ita trapezium ADGKM.ad trapezium AEHLM.Quod oportuit demonstrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXVI.

SI duo trapezia duo latera parallela proportionalia habuerint: erunt inter se vt rectangula sub quouis laterum parallelorum proportionalium, & altitudine trapeziorum comprehensa.

Sint duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD.item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt sit AD.ad EH.vt BC. ad FG. sintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumq; latus trapezij BP. FQ. Dico esse vt rectangulum sub CB. BP.ad rectangulum



sub GF.FQ. aut vt rectangulū sub DA. BP.ad rectangulum sub

ſub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipſi KD. parallela BN. & ipſi IH. parallela FO. Item ipſi KD. parallela AM. & ipſi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij productis ſi opus fuerit, illæ in punctis N. M. iſtæ in O. L.

Quoniam in triangulis KAD. IEH. lateribus AD. EH. parallelæ ſunt BC. FG. ex hypotheſi; erunt triangula KAD. Corol.4.6.
KBC. inter ſe; item IEH. IFG. inter ſe ſimilia. Rurſus quia eſt vt AD. ad EH. ita BC. ad FG. erit permutando vt AD. ad BC. ita EH. ad FG. Cum ergo ſuper duabus AD. BC. ſint conſtituta duo triangula ſimilia AKD. BKC. & ſuper duabus EH. FG. duo itidem ſimilia EIH. FIG. erit vt trian- 22. 6.
gulum AKD. ad triangulum BKC. ita triangulum EIH. ad triangulum FIG. & permutando. Quare cum ſit vt totum triangulum AKD. ad totum EIH. ita pars BKC. ad partem FIG. & reliquum trapezium ABCD. ad reliquum trapeziũ 19. 5.
EFGH. erit vt totum AKD. ad totum EIH. Inſuper cum in triangulis AKD. EIH. ductæ ſint ad latera KD. IH. parallelæ BN. FO. erunt triangula KAD. BAN. item IEH. FEO. Corol.4.6.
ſimilia; item cum ſit vt AK. ad KB. ita AD. ad BC. & vt 4. 6.
AD. ad BC ita EH. ad FG. ex hypotheſi, & vt EH. ad FG. ita EI. ad IF. erit vt AK. ad KB. ita EI. ad IF. & per conuerſionem rationis vt AK. ad AB. ita EI. ad EF. Quare cum ſuper duabus AK. AB. & ſuper duabus EI. EF. conſtituta ſint illic duo triangula ſimilia KAD. BAN. iſtic IEH. FEO. ſimilia; erit vt triangulum KAD. ad triangu- 22. 6.
lum BAN ita triangulum IEH. ad triangulum FEO. & permutando vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ita triangulum BAN. ad triangulum FEO. eſt autem trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ergo etiam erit trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. & permutando. Quare cum ſit vt totum trapezium 19 1.
ABCD. ad totum trapezium EFGH. ita pars BAN. ad partem FEO. & reliquum parallelogrammum BCDN. ad re-

liquum parallelogrammum FGHO. erit vt totum trapeziũ
35. 1. ABCD. ad totum trapezium EFGH. at parallelogrammo
BCDN. æquale est parallelogrammum sub CB. BP. & pa-
rallelogrammo FGHO. æquale est parallelogrammum sub
GF. FG. erit ergo vt rectangulum sub CP. BP. ad rectangu-
lum sub GF. FG. ita trapezium ABCD. ad trapezium
EFGH. Denique cum sit vt AD. ad DN. ita AK. ad KB.
2. 6. (quod positæ sint parallelæ BN. KD.) & vt AK. ad KB. ita
ostensum est supra EI. ad IF. & vt EI. ad IF. ita EH. ad HO.
(ob parallelas positas FO. IH.) erit vt AD. ad DN. ita EH.
ad HO. sed vt AD. ad DN. ita parallelogrammum MADC.
1. 6. ad parallelogrammum BCDN. & vt EH. ad HO. ita paral-
lelogrammum LEHG. ad parallelogrammum FGHO. vt
igitur parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum
BCDN. ita parallelogrãmũ LEHG. ad parallelogrammũ
FGHO. & conuertendo ac permutando, vt parallelogram-
mum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita paral-
lelogrammum MADC. ad parallelogrammum LEHG. Est
autem ostensum paulo ante esse vt parallelogrammum
BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita trapezium
ABCD. ad trapezium EFGH. ergo vt parallelogrammum
MADC. ad parallelogrammum LEHG. ita trapezium
ABCD. ad trapezium EFGH. sed parallelogrammo
35. 1. MADC. est æquale parallelogrammum sub DA. BP. & pa-
rallelogrammo LEHG. æquale parallelogrammum sub
HE. FQ. vt igitur rectangulum sub DA. BP. ad rectangu-
lum sub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium
EFGH. Igitur si duo trapezia &c. Quod erat demonstran-
dum.

COROLLARIVM. I.

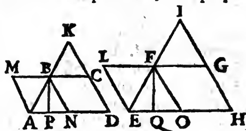
Colligitur ex probatis in propositione trapezia ABCD. EFGH. esse vt triangula AKD. EIH. quæ ex lateribus non parallelis in vnum punctum productis, & vno laterum parallelorum fiunt: item eadem esse vt parallelogramma, quæ vtro-

utrouis laterum parallelorum, & utrouis non parallelorum constant. demonstratum enim est esse vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. & vt parallelogrammum CDAM. ad parallelogrammum GHEL. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. idemque sequetur si sumantur parallelogramma sub CB. BA. & DA. AB. aut sub GF. FE. & HE. EF. vt inducenti manifestum est. Denique esse vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. hæc enim omnia ex progressu demonstrationis manifesta sunt.

THEOREMA XXXIII. PROP. XXXVII.

Trapezia quorum duo latera parallela, & vtrumque vtriq; proportionalia; habent rationem eam quæ componitur ex proportione laterum homologorum & proportione altitudinum.

Sint, vt in superiori, duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt sit AD. ad EH. vt BC. ad FG. sintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumque latus trapezij BP. FQ. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. esse compositam ex ratione AD. ad EH. & ex ratione BP. ad FQ. aut ex ratione BC. ad FG. & ratione BP. ad FQ. Vt enim trapezium ABCD. ad trapezium CDEF. ita rectangulum sub DA. BP. ad rectangulum sub EH. FQ. & rectangulum sub CB. BP. ad rectangulum GF. FQ. ex præcedenti.



23. 6. FQ. illorum vero rectangulorum ratio composita est ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. composita est ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVIII.

Trapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent sunt vt rectangula sub lateribus homologis, & lateribus non parallelis quæ æqualem angulum continent, comprehensa.

SINT vt in schemate penultimæ huius duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia, ita vt sit AD. ad EH. vt BC. ad FG. sintque præterea anguli ad D. H. ideoque etiam
29. 1. anguli ad G. C. Dico esse vt rectangulum sub AD. DC. ad rectangulum sub AH. HG. Item vt rectangulum sub BC. CD ad rectangulum sub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipsi KD. parallela BN. & ipsi IH, parallela FO. Item ipsi KD. parallela AM. & ipsi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij producitis si opus fuerit in punctis N. M. & O. L. parallelogramma erunt MD. LH. æquiangula ob angulos æquales D. H. Item parallelogramma æquiangula erunt BD. FH. ob æquales angulos ad C. G. erit igitur, ex his quæ demonstrauit Pappus lib. 7. Mathemat. Collectionum pro-
Schol. 23. 6. posit. 172. & ab eo Clauius Schol. in 23. 6. proposit. 5. vt rectangulum sub AD. DC. ad rectangulum sub EH. HG. ita parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt rectangulum sub BC. CD. ad rectangulum sub FG. GH.

ita

ita parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ſed vt parallelogramum MD. ad parallelogrammum LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Igitur vt rectangulum ſub AD. DC. ad rectangulum ſub EH. HG. & vt rectangulum ſub BC. CD. ad rectangulum ſub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Quod propoſitũ erat demonſtrare. Corol. 37. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXIX.

Trapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent; ſunt in ratione compoſita ex ratione laterum homologorum, & ratione laterum circa angulum æqualem: itém ex ratione laterum non parallelorum angulis æqualibus adiacentium, & ex ratione exceſſuum laterum parallelorum.

Sint eadem omnia quæ ſuperiori. Dico primo rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. eſſe compoſitam ex ratione AD. ad EH. & CD. ad GH. Item ex ratione BC. ad FG. & CD. ad GH. ratio enim parallelogrammi MD. ad parallelogrammum LH. compoſita eſt ex rationibus AD. ad EH. & DC. ad HG. Item ratio parallelogrammi BD. ad FH. compoſita eſt ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH. Vt autem parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. compoſita eſt ex rationibus AD. ad EH. & CD. ad GH. Itemque ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH. 23. 6. Corol. 37. huius.

Sint

Sint secundo anguli ad A. E. æquales. Constat AN. esse excessum quo latus AD. alterum parallelum BC. superat, cum in parallelogrammo BD. æqualia sint aduersa latera ND. BC. eodem modo EO. excessus est quo EH. superat FG. & latera BA. FE. latera sunt in suis trapezijs oppositis CD. GH. non parallela, angulis æqualibus A. E. adiacentia. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. componi ex rationibus AB. ad FE. & AN. ad EO. Cum enim triangula BAN. FEO. æquales habeant angulos ad A. E. habebunt rationem compositam ex rationibus BA. ad FE. & AN. ad EO. Vt autem triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. ratio componitur ex rationibus AB. ad EF. & AN. ad EO. Quod secundo loco propositum erat: igitur trapezia quæ duo latera parallela &c. Quod oportebat demonstrare.

34. 1.

Schol. in 23. 6. proposit. 1.

Corol. 37. huius.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XL.

SI circa duas perpendiculares quarum altera alterius sit dupla circuli describantur: rectæ ex centris ad puncta sectionis ductæ efficiunt angulum rectum.

Perpendiculares sint TC. CE. ad punctum E. illa huius dupla, & ex A. D. centris, quæ diuidunt rectas TC. CE. bifariam, duo circuli secent se in F. & ducātur DF. AF. Dico tam angulum ACD. quam AFD. esse rectum. Quoad angulum ACD. id constat ex descriptione. Ducatur DM.

pa-

parallela ipsi CT. secans circulũ EFC. in L. & rectam AF. in M. & ducatur ad CI. perpendicularis AB. Item connectantur chordæ TF. FC. FE. Quoniam anguli TFC. EFC. sunt in semicirculis, recti sunt: Vna igitur recta est TFE. Vt ergo TF. ad FC. ita FC. ad FE. Quare similes sunt arcus maioris ac minoris circuli nimirum FBT. ipsi FLC. & FC. ipsi FE. æquales igitur anguli FAC. FDE. Quoniam autem recti sunt EDM. CAB. ex descriptione, ideoque æquales demptis æqualibus FAC. FDE. remanent æquales FDM. FAB. sed & æquales sunt FMD. FAC. (cum enim ex descriptione duo anguli ACD. MDC. sint recti erunt MD. AC. parallellæ) æquales igitur sunt duo anguli FDM. FMD. duobus FAB. FAC. id est recto BAC. Quare & rectus est reliquus DFM. Quod probandum fuerat.

31. 3. 14. 1. 8. 6. Lemma. 5. lib. 1. Apollonij clauij. 29. 1. 28. 1. 32. 1.

COROLLARIVM. I.

Hinc constat tam rectam AE. tangere circulum EFC. in F. quam rectam DF. circulum CFT. in eodem puncto F. Nam quoniam diametri sunt AF. DF. & angulus rectus AFD. tam recta AF. cadet extra circulum EFC. quam recta DG. extra circulum CFT. Quare dictos circulos tangent. 16. 3.

COROLLARIVM. II.

Rursus manifestum est tam chordam TF. chordæ FC. quam chordam FC. ipsius FE. esse duplam. Nam vt TC. ad CE. ita TF. ad FC. & FC ad FE. sed ex hypothesi dupla est TC. ipsius CE. igitur & dupla est TF. ipsius FC. & FC. ipsius FE. 8. 6.

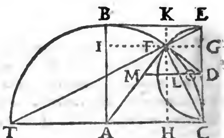
COROLLARIVM III.

Denique probatum est arcus FBT. FLC. item FBC. FE. & FB. FL. esse similes, vt ex progressu demonstrationis apertum est.

PROBLEMA V. PROPOS. XLI.

QVadrantem in duos arcus inæquales ita diuidere vt sinus versus minoris arcus, sinus versus maioris, sinus rectus minoris, sinus rectus maioris, ac sinus totus proportionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem & vnitate differentem habeant.

Ducantur duæ perpendiculares CT. CE. ad punctum C. quarum illa huius sit dupla quibus diuisis bifariam in A. D. centris A. D. descripti circuli secent se in F. & ducta AB. perpendicularis ad CT. auferat Quadrantem BC. Dico Quadrantem BC. sectum esse in F. vt proponebatur. Ducantur sinus recti FI. FH. ille minoris, hic maioris arcus: Item continuetur IF. in G. erit FG. sinus rectus arcus EF. & connectatur EB. quæ vtrumque



16. 3. circulum tanget in E. B. eritque AE. quadratum, & omnes figuræ quadrilateræ interius descriptæ erunt parallelogrāma rectangula. Cum igitur similes sint arcus FE. FOC. erit vt TC. ad CE. ita sinus rectus HF. arcus FOC. ad sinum rectum FG. arcus FE. sed TC. ipsius CE. dupla est ex hypothesi, igitur HF. ipsius FG. id est HC. illi æqualis, duplus est, sed & CH. sinus versus arcus FOC. duplus est rectæ GE. sinus versi arcus FE. id est ipsius BI. seu FK. (producta HF. in K.) est igitur EG. ad CH. vt 1. ad 2. & CH. ad HF. vt 2. ad 4. ipsi autem HF. si addatur FK. id est EG. erit tota HK. id est CE. seu AC. sinus totus quinque partes, & CA. id est

Corol. 3. præced. lem. 5. lib. 1. Astrolab. Clauius.

34. 1. lemma idem

id est IG. si dematur CH. id est GF. duæ partes remanebit FI. trium partium. Igitur BI. est vnius partis CH. duarum FI. trium FH. quatuor AC. seu AB. quinque. Est autem IB. sinus versus arcus FB. CH. sinus versus arcus FOC. FI. sinus rectus arcus FB. FH. sinus rectus arcus FOC. & AC. sinus totus. Igitur factum est quod proponebatur.

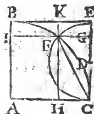
SCHOLIVM.

EX hac propositione quam plurima problemata absolui possunt, tot scilicet quot connexiones, seu coniugationes horum numerorum 1. 2. 3. 4. 5. *quibus singulæ lineæ BI. CH. FI. FH. AC. respondent, fieri possunt. Nam Quadrantis ABC. arcus CB. in F. ita secatur vt*

1 *BI. cum CH. sint æquales ipsi FI.*

2 *BI. cum FI. sint æquales ipsi FH.*

3 *BI. cum FI. ipsius CH. & CH. cum FH. ipsius FI. & FI. cum AC. ipsius FH. & BI. cum AC. ipsius FI. sint duplæ.*



4 *AF. cum FH. ipsius FI. triplæ, & ipsius BI. noncuplæ existant, atque huiusmodi alia problemata formari possunt. Ex regulis enim combinationum inter quinque res ad* 500. *possunt fieri diuersæ compositiones, quæ singulæ singulis problematis materiam præbent, vt inducenti aperte constat.*

Posset etiam problema proponi hoc modo. Intra Quadratum punctum designare in quo duæ lateribus quadrati parallelæ sese intesecantes, & in dicta latera terminatæ in quatuor segmenta ita diuidantur vt ea cum tota habeant proportionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem, & vnitate differentem. Nam si intra quadratum ABEC. describatur Quadrans ABC. & semicirculus EFC. sese in F. secantes, & ducantur GFI. KFH. lateribus quadrati parallelæ, habebunt rectæ KF. FG. FN. FH. KH. proportionem continuam quam 1. 2. 3. 4. 5. *vt ex demonstratione superiori apparet.*

Kk 2 PRO-

PROBLEMA VI. PROPOS. XLII.

Quadrantem ita diuidere vt secans arcus maioris cum tangente sit tripla sinus totius, & secans minoris arcus cum tangente sit dupla sinus totius.

Fiat eadem constructio quæ superiori problemate, & præterea producatur AF. dum rectam BE. secet in N. & CE. productam in O. erit BN. tangent arcus minoris BF. & AN. eius secans: item erit CO. tangens arcus maioris FC. & AO. secans eiusdem arcus. Dico AO. OC. simul esse triplam AC. & AN. NB. simul duplam eiusdem AC. similia enim sunt triangula AHF. ACO. Item AIF. ABN. quare & latera proportionalia habent. ideoque vt sunt FA. FH. simul ad AH. ita AO. OC. simul ad CA. at FA. FH. ad AH. rationem habent quam 9. ad 3. id est quam 3. ad 1. Igitur AO. OC. simul ad CA. rationem habent quam 3. ad 1. Eodem modo ostendemus cum AF. FI. ipsius IA. sint duplæ ex præcedenti, etiam AN. NB. ipsius AB. esse duplas. Quare quadrantem ita diuisimus &c. Quod erat faciendum.

propofit. præcedenti.

COROLLARIVM.

Manifestum est ex hactenus demonstratis sinum totum AC. tangentem CO. & secantem AO. esse in proportione Arithmetica quæ est in his numeris 3. 4. 5. sunt enim ob similitudinem triangulorum AHF. ACO. tres rectæ AC. CO. AO. tribus AH. HF. AF. proportionales, ista vero habent rationem, Arithmeticam dictorum numerorum, eandem igitur habent & illæ.

3. huius.

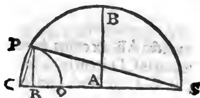
Eodem modo probatur tres AB. BN. AN. esse vt hos numeros

meros 4. 3. 5. quod hanc rationem habeant tres illis proportionales rectæ AI. IF. AF. Quare septem lineæ BI. CH. FI. FH. AC. CO. OA. erunt in continua proportione istorum numerorum 3. 6. 9. 12. 15. 20. 25.

PROBLEMA VII. PROPOS. XLIII.

QVadrantem ita diuidere vt sinus versus arcus sit octaua pars sinus totius.

Sit quadrans ABC. in quo sumatur chorda CP. æqualis medietati sinus totius CA. & demittatur in CA. perpendicularis PR. id est sinus rectus arcus PC. cuius sinus versus CR. Dico CR. esse octauam partem ipsius AC. Perficiatur semicirculus CBS. & connectatur SP. Quoniam angulus SPC. rectus est, vt & angulus PRC. erit vt SC. ad CP. ita PC. ad CR. est autem CP. ex hypothesi medietas semidiametri CA. atque adeo quarta pars totius diametri SA. Igitur etiam CR. est quarta pars ipsius CP. ideoque ipsius CA. octaua pars. Quare quadrantem ita diuisimus &c. Quod facere oportebat. 31. 3. 8. 6.



COROLLARIVM.

HInc constat si chorda sit sinus totius dimidia pars, sinum versum esse octauam partem eiusdem sinus totius.

THEO-

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XLIV.

Si à puncto rectæ datæ, in quod recta perpendicularis incidit duæ rectæ æquales hinc inde accipiantur, & ad cuiusuis extremum ex quouis perpendicularis puncto ducatur subtendens angulum rectum, ac subtendenti æqualis in data recta ex puncto incidentiæ accipiatur: erit rectangulum sub tota accepta vna cum excessu subtendentis, & dicto excessu compræhensum æquale quadrato perpendicularis inter punctum in ea acceptum, & punctum incidentiæ comprehensæ.

Sit data recta AB. ex cuius quolibet puncto C. ducatur perpendicularis CD. item in ea sumantur duę partes æquales CA. CB. & à quolibet puncto C. in perpendiculari sumpto ducatur subtendens DA. ipsique DA. ex C. æqualis CE. Dico rectangulum BEA. quadrato DC. esse æquale. Quoniam recta BA. diuisa est bifariam in C. eique

que

que adiecta est recta AE. erit rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. æquale quadrato CE. hoc est quadrato DA. 6. 5.
(æquales enim ponuntur CE. DA.) est autem quadratum 47. 1.
DA. æquale quadratis DC. CA. igitur rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. est æquale quadratis AC. CD. Quare ablato communi quadrato AC. remanebit rectangulum BEA. æquale quadrato CD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Qvod si sumatur ipsi CE. æqualis CH. & subtendenti DE. æqualis CF. erit rursus rectangulum HFE. quadrato DC. æquale, ideoque rectangula BEA. HFE. inter se æqualia. Idemque continget si plures rectæ hoc modo accipiantur.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLV.

Isdem positis: si per tria puncta ADB. transeat circulus ADB. & producatur DC. per centrum O. in circunferentiæ punctum L. Dico rectangulum AEB. ad quadratum AC. esse vt rectam DC. ad rectam CL.

Rectangulum enim DCL. rectangulo ACB. id est quadrato AC. æquale est (ponitur enim AB. bifariam diuisa in C.) posita autem communi altitudine DC. erit quadra- 35. 3.
tum DC. ad rectangulum DCL. id est, ad quadratum AC. 1. 6.
vt recta DC. ad rectam CL. sed quadratum DC. ostensum est in superiori propositione æquale rectangulo AEB. Igitur vt rectangulum AEB. ad quadratum AC. ita recta DC. 38. huius.
ad rectam CL. Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLVI.

POnantur adhuc ea omnia quæ ſuperiori propoſitione & rectæ CD. ducatur ad circulum æqualis EM. Dico à recta EM. circulum tangi in puncto M.

44. huius. Quoniam rectangulum BEA. æquale eſt quadrato DC.
1. pron. & quadrato DC. ponitur æquale quadratum EM. erit quadratum EM. rectangulo BEA. æquale, igitur recta EM.
37. 3. circulum tanget in M. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

QVod ſi ſumantur CE. CH. ipſi DA. & CF. ipſis DE. æquales ac per E. D. H. deſcribatur circulus, accipiaturque ipſi DC. æqualis FP. quæ ex puncto F. in circulum ducatur, ea ob eandem demonſtrationem circulum tanget in P. & quia vtrumque quadratum EM. FP. quadrato DC. æquale eſt; erunt quadrata EM. FC. id eſt recta EM. FP. æquales.

FINIS LIBRI IV.

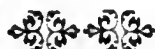
CVRVI



CVRVI AC RECTI

Proportio promota.

LIBER QVINTVS.





VANTI Mathematicas disciplinas fecerit magnus ille Academiæ moderator Plato, neminem ignorare arbitror qui vel in admodum vulgata historia mediocriter sit versatus. Certè vt ante ipsum Pythagoras neminem in subliminem Philosophorum claßem admittebat, qui prius in solida illa septem annorum ἐχεμυθία μαθηματικὸς τὰ μαθήματα, ac Geometriam præsertim, Arithmeticam, Harmonicamq; non excoluißet, ità iste omnes Geometriæ ignaros Academiæ ingreßu arcebat inscripto foribus edicto ne quis ἀγεωμέτρητος ingrederetur; neq; verò iam ingressos ab eius exercitatione feriari sinebat, sed singulis diebus Geometricum problema proponebat, vt nimirum animam ex numeris ac figuris veluti concinnatam sui similibus exerceret, ac modo ad infinitas omnisq; interualli ac diuisionis expertes formas quibus diuinam mentem γεωμετρεῖν haud ignorabat cogitationem erigeret: modo ad vniuersi iucundum spectaculum, quod totum pulcherrimis rationibus atq; aptis proportionibus colligatum est, deduceret; deniq; quòd maxime spectabat,

Aulus Gellius lib. 1. c. 9.

Tzetes. Adag. chil. 3. centur. 3.

Philoponus.

Plutarchus Sympol. lib. 8. q. 2.

Plato in Timæo.

figuras virtuti conuenientes, modulationes, ac motus facilius traderet, & vitiorum defectus, atq; excessus apertius indicaret. Quid? quod vel Dijs adeo curæ fuisse existimarit mortales Geometria institui, vt eius contemptum grauibus pœnis persequerentur. Delijs enim peste laborantibus, teste Philopono in comment. in 7. c. primi posteriorum ad illa Aristotelis verba, ἀλλ' ἤδη ὅτι δύο κύβοι κύβος: consultus Apollo respondit liberatum iri peste si arã suam, quæ cubicæ erat figuræ, duplicassent: conductores priori aræ cubum alterum æqualem superposuerunt, atq; ità cubi forma immutata facta est ara non cubica sed δοκὶς seu quadrilatera columna. Lue itaq; minime cessante iterum consulentibus respondit Apollo nõ esse oraculo satisfactum, se enim imperasse vt aram forma cubi retenta priore duplo maiorem erigerent, non vt cubo cubum imponerent. Hoc illi oraculum ad Platonem deferunt, qui respondit neglecta Geometria Græcos à Deo accusari, neq; id aliter fieri posse quam si inter duas in dupla proportione datas rectas (quod tamen ante ipsum Hippocrates Chius animaduerterat) duæ mediæ proportionales reperirentur. Quod problema non solum ad discipulos reiecit, sed ipse quoq; in eodem argumento elaborauit, excogitato elegantissimo mesolabio quod extat apud Eutocium in comment. super secundum Archimedis de sphæra, & cylindro, Philopono, quod quis mirari possit, non visum. Neq; vero hoc vnum illius inuentum fuit; nam primus sectiones Conicas & Cylindricas, vt quidam existimant, inchoauit; modum demonstrandi per analysim excogitauit; rationem Gæodeticam agri dimentiendi elegantissimam reperit. Sed hæc de eo alij; Quid vero si quæ extant eius ingenij monumenta euoluamus, quàm multa in eis Mathematica occurrent, quæ etiam olim Theon Smyrnæus, ac Philippus Mendæus commentarijs illustrarunt? Sed quod ad rem nostram magis facit, quot ille passim laudibus Mathesin totam, sed Geometriam præsertim in cælum extollit? An non in Timæo Mathematicam cognitionem erudiendi viam appellat, quod, vt inquit Proclus, eam habeat rationem ad vniuersorum scientiam quam eruditio ad virtutem, ac velut hæc animum probis ad vitam moribus informat, ita illa cogitationem nostram animaq; oculum ad eam quæ inde procedit euectionem seu circumactionem præparat? Annon de legibus 6. & 7. de singulis Mathematicis addiscendis leges sancit, ac tantum Geometriæ tribuit vt asserat qui asymmetriam quantitatum ignoret eum non in hominum sed pecudum censu habendum esse? Quid? quod apud eum in Republica Socrates asserit oculum animi qui alijs studijs veluti excæcatur

Philoponus in 7. c. 1. posteriorum.

Valer. Max. l. 8. cap. 13. Plut. de dæmon. Socratis.

Proclus l. 2. elem. c. 4.

Eratosthenes, apud Eutoc. Comment. i Archimed.

Laert. i Plat. 2. Vitruuius. lib. 9. c. 1.

Proclus c. 8. in lib. 1. elementorum.

Proclus ibid. Plato 7. de Rep.

excæcatur

cæcatur atq; effoditur, Mathematicis disciplinis recreari, & ab inanibus simulachris & rerum ludibrijs ad ea quæ vera sunt; ab obscura ac dubia luce ad vibratum intelligendi fulgorem, & prorsus à specu & vinculis generationis, ac materialibus retinaculis ad incorpoream & indiuisam essentiam exurgere? Ac ne longior sim, Mathematicam vbiq; scientiam vocat, maximæ felicitatis causam, eiusq; luminis largitricem, quod iuxta Homericam Mineruam decem mille corporis, ideoq; vniuersis Argi oculis sit præferendum. Proclus c. 10. in 1. elē. Homerus in Odyss.

At cur ista tam multis commemoraui, mi Lector? non alia de causa quam vt te non in admirationem tantum, sed etiam in stuporem ac si fieri possit etiam in ecstasim rapiam, cum te ad coronidem deduxero, atq; ostendero quam inconcinnum fastigium elegantissimo operi imponere, atq; absonam perorationem tot Matheseos laudibus atq; elogijs addere videatur. Nempe sub finem libri septimi de Republica sic de Geometria statuit. Αἱ δὲ λοιπαὶ ἃς τοῦ ὄντος τι ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι γεωμετρίαν τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας ὁρῶμεν ὡς ὀνειρώττουσι μὲν περὶ τὸ ὄν, ὕπερ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι. *Quod ita vertit Marsilius Ficinus. Reliquæ vero quas diximus verarum rerum esse participes Geometriam scilicet eiusq; comites circa ipsam essentiam quodammodo somniant, syncere autem ab illis quicquam cernere impossibile est, tantisper dum suppositionibus hærent, easq; ratas & immobiles adeo seruant vt illarum rationem reddere nequeant. Nam vbi principium quidem ponitur id quod est ignotum, finis autem & media ex ignoto tracta connectuntur, collectam inde assertionem quonam pacto scientiam vocemus? De cuius versionis fide si dubitas, en nostram ad verbum ferme redditam. Reliquæ vero quas entis aliquid comprehendere diximus Geometriam videlicet, & quæ ipsam sequuntur, videmus vt somniant circa id quod est, supra autem impossibile ipsis videre, dum suppositionibus vtentes eas immobiles sinunt, earum rationem reddere minime valentes. Cui vero principium est id quod non nouit, finis vero & media ex eo quod minime nouit, qui fieri poterit vt ex huiusmodi assensu scientiam consequatur? Deum immortalem quid hoc ad versum? Itane quam tot laudibus cumulasti, quam toties honorifico scientiæ nomine compellasti, vni Dialecticæ seu Diuinarum rerum cognitioni inferiorem asseruisti, nunc certissimam ignorationem,* Plato 7. de Rep.

inane commentum, ac somniantis mentis ludibrium vocas? Adeo ne subito calculum reducis vt quam paulo ante vnione & creta momento post carbone notes? Annon hoc quidlibet ex quolibet efficere, &

Humano capiti ceruicem iungere equinam?

Scio quid ad hæc non sine ratione dici queat; Platonem ζητητικὴν methodum sequutum rebus nomina, quæ primæ rationes offerebant indidisse, hinc cum melior melioris notionis species effulgeret priori denominatione abrogata magis conuenientem atq; accommodatam substituisse, atq; eousq; solerti indagine processisse dum apicem attigisse, remque omnibus numeris absoluisse, & ad senarium deduxisse videretur.

Proclus cap. 10. in 1. Element.

Scientiam nempe, vt inquit Proclus, plærisq; in locis omnem vniuersalium appellat cognitionem, ipsamq; sensui singularia cognoscenti opponit, quo sensu in Ciuili, atq; in Sophista non tantum Sophisticam sed etiam adulatoriam præclaro hoc nomine dignatur. Hanc autem vniuersalium cognitionem rursus in eam quæ causas probat, quæq; absq; causis cognoscit distribuit, atq; illam quidem scientiam, hanc experientiam censet appellandam. Res enim, inquit in Symposio, quæ rationem nullam habet, quo tandem pacto scientia esse possit? Hanc vero scientiam cui cognoscendi vim causa tribuit rei subiectæ proprietatibus iterum diuidit, & vnam quidem partibilium coniectatricem seu στοχαστικὴν alteram vero eorum quæ per se sunt, eodem q; modo semper habent cognitionem appellat, quo pacto Medicinam, & omnem quæ res ex materia concretas pertractat à scientiarum consortio seiungit. Mathematicam vero atq; omnem omnino rerum sempiternarum cognitionem scientiæ nomine cohonestat. Hanc deniq; scientiam ita partitur vt alteram ab omni suppositione immunem esse velit, alteram ex suppositione scaturire, & illam quidem citra suppositionem vniuersorum cognoscendorum vim habere, & gradatim ad supremam rerum omnium causam, atq; vltimum bonum scandere, in quo tandem conquiescat: hanc vero certa sibi principia præfinire, ex quibus demonstret quæ ea consequuntur, ideoq; non ad principium, sed ad finem tendere, cuiusmodi cum sit Mathesis eam, vtpote suppositionibus vtentem ab illa quæ suppositiones omnes excludit, ideoq; absolutissima scientia censenda est, deficere.

Acutè hæc quidem, sed si Platonis verba diligentius pensitentur, eorumq; sensus penitius inspiciatur, vereor ne aliter ratiocinandum sit.

Ego

Ego quidem sic censeo ad perfectam scientiæ constitutionem id requiri non modo vt certum sit rem subiectam aut esse, aut esse posse, sed eius definitionem, cuius veluti lumine passiones in subiecto hærere demonstrantur, recte atq; probe institutam esse. Hoc ni constet Cimmerias tenebras esse non scientiam, neq; vigilantis mentis certum spectaculum, sed somniantis animi inane spectrum esse dicendam: Quid enim? afferat aliquis satis esse ad scientiam, vt subiectum eiusq; definitio supponatur, non probetur: hinc ex suppositione certa consequentia deducatur. An non ego statim efficiam vt de Chimæra ipsa certa cognitio esse possit? Deprome ex poetarum figmentis Pegasum: illum demonstrationis materiam hypotheticam statue, hinc sua definitione ita circumscribe, vt sit equus alas pro corporis portione atq; viribus humeris insertas habens; mox ita ratiocinare: omnis equus alas pro corporis mole atq; viribus habens volare potest, atqui huiusmodi est Pegasus, volare igitur potest. Hæccine erit demonstratio? risu ac sibilis explodendus sim si afferam. At recte sequitur ex hypothesi Pegasum volare posse; rectissime; verum non hæc demonstratio est, sed rei absurdæ ex absurda conueniens ac secundum formam illatio. Iam vero cum Geometriæ subiectam materiam diligentius ad libellam exigo, videor mihi comperire minime compertum esse, aut quod ipsa existere possit, aut quod eius definitiones recte sint instituta. Nam vniuersale quidem quid considerat Geometria, non tamen vnum ante multa, vt Dialectica Platonis aut Aristotelis Metaphysica, id enim non omnis tantum mutationis, sed & diuisionis ratione caret: neq; vnum in multis vt Naturalis scientia, vbi enim in singularibus impartibile, vel latitudinis expers? vbi quantitas crassitie carens? vbi ex circuli centro sese effundentium linearum æqualitas? vbi semper stabiles laterum rationes, atq; angulorum rectitudines? certe quod sciam nullibi, nam quæcumq; sensibus obuiæ sunt figuræ confusa commistione turbatæ sunt, neq; quicquam in eis reperitur, quod a contrario purum atq; sincerum asseri possit. Sed neq; vnum est ex multis, quod experientiæ atq; coniecturæ proprium est, altius enim assurgit Geometria, & ex principijs vniuersalibus non ab experimentis particularibus in suas conclusiones progreditur. Quod nam ego dicemus esse Geometriæ obiectum? idem quod ipse Plato vnum ex vna anima, quæ Geometricarum formarum vnica genitrix, eas non alieno semine sed suaui atque energia in se ipsa conceptas fecundo sinu excludit: ideoque idem ille Diuinus author primas substantias à materiæ contagione intaminatas intelligentiæ; sensibiles & infimam natura condi-

ræ conditionem sortitas opinioni, & coniecturæ; medias formas, cuiusmodi sunt Mathematicæ, mediæ inter intelligentiam & opinionem cogitationi attribuit, quod eas non materia promat sed sola cogitatio effingat. Sed eadem Chimeras, Harpyas, Gorgonas effingit; Verum id quidem, sed hoc inter ea figmenta, & Mathematicas figuras interesse dices, quod istæ instar idæarum ac absolutissimorum exemplarium obtineant, ad quæ quo similitudine propius sensibiles accesserint, eo maiorem perfectionem atque certitudinem nanciscantur. Atqui vel de hoc ipso ambigo, num hæc vera sint rerum quæ esse possint exempla, non minus quam vtrum perfecti equi idea sit Pegasus, & vtrum eorum definitio ad exactam rei fidem sit condita. Num igitur forte ad hæc respiciens vir sapientissimus ait Geometriam circa essentiam somniare, ac rei non veræ, sed suppositæ definitione fabrefactæ, quæ forsan ideo thesis à Geometris dicta est, naturam inquirere, cuius rationem ideo reddere nequeat quod eius principia tanquam rei commentitiæ non cognoscat. Hanccine igitur Geometriæ labem hærere sinemus, vt quæ omnium pene philosophorum calculis inter principes scientias non infimam hactenus sedem obtinuit, ea iam capite censeatur, ac in vilissimam figmentorum turbam tanquam inane λῆρον amandetur. minime vero, remedium est quo huic malo succurratur, & quod magis mireris ex medicina scito depromptum, quo contraria contrarijs curari statuuntur.

Nihil vt ego quidem reor Mathesi magis contrarium est quam motus. Vulgatum est in superiori Licæo, neque dissonat inferior Academia, Mathematicam abstrahere à motu. Ita naturæ magnus interpres tum alibi passim, tum 2. Physic. c. 2. qui quantum non ea ratione spectari ait à Mathematico qua à Physico, nam ille inquit quanta χωρίζει, χωριστὰ γὰρ τῇ νοήσει κινήσεως ἐστί, καὶ οὐδὲν διαφέρει, οὐδὲ γίνεται ψεῦδος χωριζόντων. *Separat, separata autem sunt mente a motu. & nihil interest nam abstrahentium falsitas non est; & paulo post* τὸ μὲν γὰρ περιττὸν ἔσται καὶ τὸ ἄρτιον, καὶ τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπύλον, ἔτι δὲ καὶ ἄρυθμος, καὶ γραμμὴ καὶ σχῆμα ἄνευ κινήσεως. *Impar vero & par, & rectum, & curuum, insuper vero & numerus, & linea, & figura sunt sine motu. Ipse vero toties commòratus nec vnquam sine laude commemorandus Plato adeo motum in Geometria reformidat, vt ne ipsa quidem nomina quibus quanta quadrari, produci, addique dicuntur in vocum Geometricarum nomenclaturam admittere velit: ita enim in 7. de Repub.* λέγουσι μὲν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως. ὡς γὰρ πρατ-

Arist. 2. Physic. c. 2.

Plato 7. de Repub.

πράττοντες, καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τὺς λόγυς ποιέμενοι λέγυσι τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν, καὶ παρατιθέναι, καὶ παντα ἕτω φθεγγόμενοι. τὸ δ' ἐςὶ πυ πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτήδευομενον. *Loquuntur quidem admodum ridicule atq; coacte qui tanquam agentes atque effectionis gratia verba facientes dicunt quadrare, producere, apponere, atq; alijs eius generis vocibus vtuntur; quasi uero disciplina cognitionis ergo non quęratur. Idem etiam Eudoxũ atq; Architam Tarentinum, ac Menęchmum, reprahendiße dicitur quod Geometriam ad Mechanicam quæ motu exercetur traduxißent, atque Philosophiam prostituissent. At audi paradoxum non minus verum quam admirandum. Aio neque Geometriam esse absque motu, neque eius veritatem sine motu intelligi poße. Nemo est qui Philosophiam vel à limine salutarit, cui notum non sit Matheseos subiectum esse quantitaem: hanc autem vel continuam eße vel discretam; illam Geometriæ istam Arithmeticæ materiam præbere: rursus continuam vel permanentem eße vel successiuam: successiua comprehendi motum atque tempus ideoque motum materiæ tamen inquinamentis expurgatum Geometriæ ditione teneri. Sed & aßero permanentis ipsius quantitatis veritatem in profundissimis tenebris immersam latitare ni eã inde motus in apertam lucem eruat. Supponit Stichiota lineam esse quæ in longitudinem extenditur. latitudine omnino caret; & rectam dici cum ex æquo sua interiacet puncta. Ego vero hac de re plurimum non dubito, cum enim neque lineam rectam, nec lineam in rebus indiuiduis vnquam viderim, num ea sit, ant omnino osse possit, vel si vtrumque sit, vtrum recte suis terminis circumscripta sit, ac probe definita certo statuere non possum. Prodeat in medium motus ac punctum afficiat, fluat illud, ac sui veluti vestigium relinquat, an non statim intelligis progreßu illo longitudinem delineari latitudine carentem? ni velis aßerere punctum a quo producitur secari posse, quod indiuiduæ ipsius naturæ omnino aduersatur: quod si idẽ punctum breuissimo interuallo ex vno in alium terminũ contẽdat, ita vt ab eo ne tantillum quidem deflectat, nunquam subsultet numquã subsidat: cui nõ statim manifestũ euadit et lineam rectam esse poße, & recte esse definitam? neq; aliter de superficie statuendum; sed apertius forte aßertioni fidem astruit circulus, & quæ ex eo figuræ seu planæ seu solidæ deriuantur. Circulus inquit elementorum artifex, est figura plana vna linea contenta quæ circumferentia vocatur, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra superficiem sita sunt omnes rectæ incidentes inter se sunt æquales. Hic amarum renidebit morosus veritatis perscrutator,*

Plut. in Marcell. & in Symposiac.

Euclid. defin. 2. & 4. lib. 1.

Euclid. def. 15. l. 1.

tor, ac quassato capite fronteq; caperata negabit huiusmodi figuram reperiri posse, neque si extet signum suo complexu continere à quo eius ambitus paribus vndequaque radijs attingatur. Sed aduocetur linea recta, ac in plano aliquo circa alterum sui extremum tanquam cardinem conuoluatur dum eo vnde motus exordium sumpsit regrediatur: momento circulum efformatum intelligis, ac verticem immobilem circa quem designatrix linea conuersa est centrum non dubitas affirmare, à quo omnes rectas ad peripheriam æquales ideo audacter pronuncias, quod singulæ cum linea mota coincidant, ideoque cum ei, tum inter se, quod ex primo pronunciato constat, sint æquales. Neque aliter Sphæræ faces præfert motus, cum manente semidiametro, semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur vnde moueri cœperat, circum assumpta figura: aut Cono, quando trianguli rectanguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum reuertitur: aut Cylindro quando motu parallelogrammi eodem modo procreatur. Denique nulla est figura licet aut compositione fiat, aut sectione cuius veritatem præcedens aliquis motus non afferat. Et certe, quod mirum est, hæc ad verbum Platonis sententia esse videtur in eo quem supra produximus ex 7. de Republica, loco, cum ait fieri non posse vt Geometria eiusque Comites quidquam videant dum suppositionibus vtentes eas immobiles relinquunt, earum rationem reddere minime valentes: quasi dicere velit tum demum futurum vt videant cum suas ὑποθέσεις seu suppositiones (ita definitiones vocantur) mobiles effecerint, easque demum rationem antea ignotam facile reddituras. Neque eam tantum Matheseos partem quæ in contemplatione versatur illustrat intelligibilis hic motus, sed & ei quæ veluti effectione quadam perficitur adeo necessariam operam nauat, vt sine ea cõstare nulla ratione possit. Quod enim Problema intelligi, ne dum solui queat in quo aut rectæ a signo ad signum non moueantur, aut in infinitum producantur, aut ad certos angulos inflectantur, aut additione vel subtractione augeantur minuanturue, aut in partes secentur, aut alijs huiusmodi Mathematicis motionibus non cieantur? Vides igitur vt non tantum in Physicis, sed etiam in Mathematicis motus fidissimi indicis instar latentes veritatis recessus explorat, eoque vacillantem animum veluti manu ducit: atque vt illic ex Philosophi decreto ignorato motu, naturæ ignoratio sequitur, isque est qui primum rerum omnium motorem, puram cælestium orbium ἐντελέχειαν, elementorum in mutuas transformationes propensionem accuratè peruestigat, atque admirabi-

Euclid. def. 14. 18. 21. lib. 11.

lem

lem illum Protheum varijs accidentium laruis, ac omnigena aspectus mutatione menti illudentem deprehendit, formaque sua redditum in intellectus aspectum producit; ita in Mathematicis tanquam ductarius funis cogitationis trochleæ circumuolutus latentem in imo Democriti puteo rerum Geometricarum veritatem expiscatur ac tantum non corporis oculis spectandam in apertam demonstrationum lucem educit.

Sed aduerte mi lector duplicem fieri in plano motum (Mathematicum hic semper intelligimus, non physicum à quo mathesis penitus seiuncta est) alium qui non tantũ fieri posse sed quomodo fieri possit intelligitur aut citra demonstrationẽ, aut præcedentis alicuius demonstrationis præsidio, alium qui fieri quidem posse deprehenditur, ratio tamen qua fiat non apparet. Exempli loco, lineam rectam circa alterum sui extremum moueri, ac circulum delineare posse, idq; quo pacto fiat statim intelligis; duas vero rectas ita moueri posse vt in perpetuo vtriusque augmento eadem vtriusq; analogia seruetur non percipis, nisi problemate 4. sexti elementorum informatus quo tribus datis rectis lineis quarta proportionalis inuenitur. Rursus in descriptione lineæ Quadrantis quam teste Pappo lib. 4. collectionum Mathematicarum Dinostratus ac Nicomedes aliique iuniores ad circuli τετραγώνισμον *excogitarunt facilè percipis fieri posse, vt qua proportione recta rectã, eadem recta circularem secet, qua vero ratione id fieri queat non intelligis; cum nondum eo Geometriæ inuentum peruenerit, vt tribus datis lineis rectis quartam proportionalem circularem reperire valeat. Postremum hunc motum, quæque ex eo procreantur, figuras inter Geometricas non ausim recensere, cum non constet num ex Geometriæ fontibus deriuari possint. In ijs tamen non sine magno fructu, ac iucunditate versati sunt grauissimi authores, earumque proprietates quibusdam suppositis demonstrarunt vt lineæ Conchyliatæ Nicomedes, Volutæ Archimedes, Quadratricis Dinostratus, Hæderiformis ac Clypearis Geminus, Paradoxæ Menelaus, Spiricarum Perseus, nosque sequenti libro de earum nonnullis nouas affectiones demonstrabimus. Primum vero motum & qualemcumque enatam ex eo formarum sobolem Geometricæ familiæ annumerandum esse constanter affirmo. [Quid ni? cum motus ipse Geometricus sit, & figura quam progenuit per Geometricas* ἀποδείξεις *Geometrici generis esse comprobetur, nisi velis contendere eum in hoc album referendum non esse cuius* γένεσις *non statim, ac primo intuitu vt circuli, sed de-* Proclus & Pappus.

monstrationum velut adhibito collyrio appareat. Itane? ergo nihil in Geometria Geometricum præter hypotheses, petitiones, ac dignitates censendum erit, cum reliqua omnia demonstrationum adminiculo comparentur. Quid? quod Demonstrationes id nominis maiori iure quam principia ipsa sibi vendicare videntur? Scientia est Geometria, ratiocinatrix igitur ac discursiua, quæcunque ego discursu ab ea procedunt maiori similitudine Genitricem referunt, quam definitiones illæ, atque effata quæ natales suos primæ aut secundæ mentis operationi acceptam ferunt.

Pappus lib. 3. ad proposit. 4. & lib. 4. ad proposit. 30.

Sed quorsum tam multa, mi lector? Problematum antiqui tria genera statuerunt, & eorum alia plana seu Geometrica, alia solida, alia linearia appellari. Quæ igitur per lineas rectas, & circuli circumferentiam solui possunt plana ideo dicuntur, quod lineæ per quas soluuntur in plano ortum habeant: quæ vero enodantur assumpta in constructionem coni sectione solida nuncupantur, quod solidarum figurarum superficies, conicas nimirum adhibeant. Denique cum præter dictas lineas aliæ assumuntur varium ac trasmutabilem ortum habentes quæque ex inordinatis superficiebus & motibus implicatis fiunt, quales sunt Helices & quas Græci τετραγωνίζουσας *appellant, tertium genus existit quod lineare vocitatur. Ego vero in quinto hoc libro, nouo vt reor inuento, sectiones omnes conicas Ellipsim, Parabolam, Hyperbolam in plano motu lineæ rectæ quæ subtensæ in circulo continuo fit aut æqualis aut proportionalis describo, varias earum affectiones atque analogias demonstro. Eas igitur figuras Geometricas esse & quæ de ijs traduntur siue Theoremata siue Problemata certissima esse, nec solidis tantum sed etiam planis ac Geometricis enumeranda esse contendo cum motu, circulo, & lineis rectis non tantum in plano delineentur, sed & earum affectiones omnes comprobentur. Vt ideo Pappo Alexandrino amplius assentiri non possim dum erroris arguit Geometras qui Problema planum per conica expediunt, quasi ex improprio genere media depromant atque ineptis instrumentis minimeque conuenienti materia eius substructionem moliantur. Sed fiunt sectione corporum solidorum? Quid tum? fit & triangulum sectione Coni per verticem; parallelogrammum describitur sectione cylindri per axem: Circulus vtriusque sectione aut basi æquidistante, aut sub contrarie posita, aut globi qualicumque delineatur, ideo ne igitur plana ac Geometrica de ijs Theoremata ac Problemata non sunt quod etiam solidorum* τομῇ *describantur? At forsan vrgebis ideo Geo-*

Apoll. 3. lib. 1. conic.
Seren. p. 2. de sectione cylindri.
Apoll. 5. p. lib. 1. conic.

metrica

metrica non esse quod earum definitiones in Geometricis elementis non tradantur: quasi vero nihil Geometricum censendum sit præter elementa: Annon idem hoc ac si quis asserat nihil in physicis naturale esse quod elementum non sit? Cur vero antiqui Geometræ admirati mirificas Theorematum conicorum demonstrationes ab Apollonio Pergæo prolatas illi magni Geometræ agnomen indidissent; nisi materiam in qua versabatur Geometricam iudicassent? Ex his efficio Problema quo inter duas datas rectas duæ mediæ proportionales à Menæchmo (quem conicarum sectionum authorem Proclus facit) per duas parabolas se se in puncto secantes inueniuntur, quod octauum est apud Eutocium in 2. Archimedis de sphera & cylindro, & planum esse, & Geometricum, ideoque cubi duplicationem Geometrice esse repertam. Neque vero hic quis opponat punctum in quo geminæ illæ parabolæ coeunt non assignari, neque enim id magis requirendum est, quam vt in primo apud Euclidem Problemate punctum in quo duo circuli ex duobus datæ rectæ lineæ extremis descripti se se secant alio modo quam ipsa circulorum descriptione designetur. Quod si vlterius ineptiat, ac dicat ideo punctum illud apud Euclidem non assignari quod vno circini circumductu aperte determinetur, quod in parabolis fieri non potest, an non animaduertit quantam iniuriam mathesi inferat, cum eam sordida mechanicorum instrumentorum tractatione infamat, ac eius nobilitati humilis artis exercitio notam inurit? Sed si hoc velit, nos quoque organon inueniemus quo perpetuo ductu Parabola delineetur. Eutocius in secundum Archimedis de sphæra & cylindro meminit instrumenti cuiusdam ad similitudinem Græci λαμβδα conformati, quo sectio coni rectanguli, seu Parabola describitur, eiusque inuentionem Isidoro cuidam Milesio mechanico magistro suo attribuit, qui illud etiam in commentarijs camaricarum Heronis descripserit. Ratum igitur esto, figuras hasce licet coni sectione etiam fiant alterius nihilominus generis etiam esse: cumque motu possibili progignantur, vere & existere & ex motu illo definiri posse: isque cum Geometricus sit, eas quoque Geometrico Schematum ordini inserendas esse: denique cum in plano per circulum & lineas rectas describantur, in planis censenda esse quæcumque de illis Theoremata ac Problemata procudantur. Sed de his hactenus.

Seren. 5. & 6. de sectione cylindri. Theodos. prop. 1. primi spheric. Eutocius in primum Conic. initio.

Nos totum hunc librum sectionibus conicis tribuemus, earum genus in plano ex circulo per motum manifestum deducemus, varias earum ἰδιότητας inuestigabimus, nonnullas etiam analogias, sed veluti per

Mm 2 tran-

transennam, indicabimus, vberiorem enim de ijs tractationem in eum librum reijcimus quem de dimensione & quadratura Hyperbolæ, Deo fauente, edituri sumus, quem peculiarem ideo esse voluimus, vt nouum inuentum ab aliorum consortio segregatum intentius spectetur & maiori cum admiratione, legentium in se animos conuertat. Præmittimus autem aliquot definitiones tum vt noua nonnulla quæ nos reperimus, explicemus; tum vt molestas circumlocutiones, quæ passim vsurpandæ essent, euitemus.

DEFINITIONES.

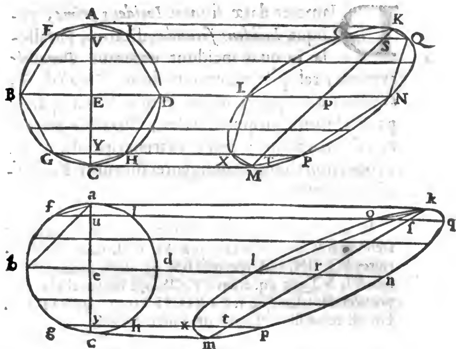
I.



I duabus rectis parallelis recta occurrat, quæ sit diameter alicuius figuræ intra parallelas contentæ; & in easdem aut alias parallelas alia recta incidat, vnaque aut duæ parallelæ ex eadem in eandem partem ità moueantur alteri continuò parallelæ, vt illa suam diametrum, ista suam incidentem eadem ratione diuidant; & partibus parallelæ quæ à figuræ peripheria circa diametrum comprǽhenduntur partes alterius parallelæ circa suam incidentem sint proportionales: dicatur ille *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidistanter proportionalis*.

SINT duæ rectæ parallelæ AK. CM. in quas incidat recta AC. quæ sit diameter cuiuscumque figuræ, vt verbi gratia, circuli intra dictas parallelas contenti: & in easdem aut alias parallelas AK. CM. alia recta MK. incidat, vnaque

que parallela vt AK. in prima figura, aut AK. in prima, & ak. in secunda ita moueantur alteri CM. aut cm. conti-



nuo parallelæ vt AK. suam diametrum AC.& incidentem KM. in partes eiusdem rationis diuidant aut in quam rationem recta AK. rectam AC. aut KM. in easdem rectæ ak. ipsam ac. aut km. secet : sintque partibus ipsius parallelæ VF. VI. circa diametrum, partes SO. SQ. aut so. sq. circa incidentem KM. aut km. Item partes BE. ED. ipsis LR. RN. aut lr. rn. & GY. YH. ipsis HT. TP. aut ht. tp. atque ita continuo in reliquis, proportionales; motum illum linearum AK. ak. vocabimus ad datam figuram, vt hic ad datum circulum inter duas parallelas (siue illæ eadem, sint siue diuersæ) æquidistanter proportionalem.

Dia-

II.

Diameter datæ figuræ *Incidens prima*, reliqua *Incidens ſecunda*, dicatur; Parallelæ in quas incidunt vocentur *Parallelæ extremæ*; reliquæ quæ motu fiunt, *Parallelæ interiores*; quæ per centrum tranſit *Media*; partes parallelarum proportionales, *Parallelæ proportionales* vocentur: rectæ extrema parallelarum proportionalium coniungentes dicantur *Rectæ ſibi reſpondentes*.

Vt in propoſita figura incidens prima eſt AC. incidens ſecunda KM. parallelæ extremæ AK. CM. parallelæ interiores FQ. BN. GP. &c. ipſa BN. parallela media, denique VI. SQ. aut sq. item FV. OS. aut os. parallelæ proportionales; denique rectæ KO. AF. ko. af. Item FB. OL. fb. ol. rectæ ſibi reſpondentes nominentur.

III.

Motus in quo parallelæ proportionales etiam æquales ſunt dicatur *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidiſtanter ac æqualiter proportionalis*: ſi vero parallelæ proportionales ſint inæquales, *Motus inæqualiter proportionalis*.

IV.

Si vero parallelæ proportionales quæ circa incidentem ſecundam mouentur, figuram ſuis

ſuis extermis deſcribant, ea vocetur *Figura ad datam Analoga*.

Vt in propoſito figura KLMN. aut klmn. dicitur ad datum circulum analoga.

V.

POlygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta, dicuntur cum totidem rectis ſibi reſpondentibus, in vtraque figura continentur.

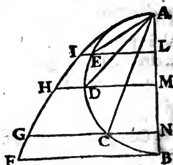
Vt polygona AFBGCHDI. & KOLXMPNQ. & kolxmpnq. polygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta nuncupantur, eo quod rectis ſibi reſpondentibus terminentur.

VI.

SI in circulo, chordarum maxima circa verticem figuræ ita conuertatur vt continuo peripheriam in puncto ſecet, per quod tranſiens recta quæpiam ita moueatur vt cum diametro per verticem tranſeunte æquales angulos faciat, ſeu continuo parallelas delineet, eaſque chordis inter verticem & peripheriam interceptis proportionales: deſcribet dicta parallela altero extremo lineam curuam ac figuram quam vocemus Conicoides primum.

Vt

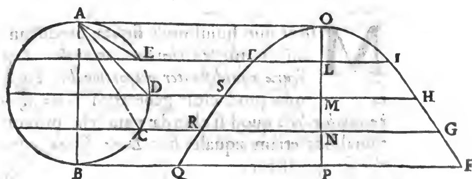
Vt sit circulus ADB. cuius vertex A. diameter AB. maxima chorda AB. quę circa alterum diametri extremum seu verticem A. ita circumagatur vt peripheriam continuo secet verbi gratia in punctis B. C. D. E. per quæ transeat FB. ac ita sursum moueatur vt cum AB. faciat angulum quemcumque FBA. ac motu parallelo delineet rectas parallelas GN. HM. IL. proportionales chordis AB. AC. AD. AE. nempe vt AB. ad AC. ita sit FB. ad GN. & vt AC. ad AD. ita GN. ad HM. & vt AD. ad AE. ita MH. ad IL. procreabit dicta linea FB. altero extremo F. lineam curuam FGHIA. quam *Conicoides primum* liber appellare tantisper dum eius naturam inuestigauerimus.



EAdem figura producetur si intra duas parallelas duæ incidentes ducantur rectæ, quarum prima sit perpendicularis, secunda quemlibet angulum cum ijs constituat; ac circa perpendicularem circulus describatur; moueaturque altera parallelarum ita vt alteri parallelæ semper æquidistet, ac partes eius circa secundam incidentem proportionales sint chordis quæ a puncto circuli vnde moueri cæpit ad punctum vbi parallela circuli peripheriam secat ducuntur, describetur circa secundam incidentem linea curua, ac figura quam volumus *Conicoides primum vocitari*.

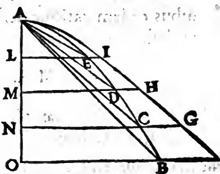
Vt

Vt si sint duæ parallelæ AO. BP. ad quas AB. prima incidens sit perpendicularis, circa quam circulus descriptus sit ADC. secunda incidens OP. cum dictis parallelis



quemlibet angulum faciat; moueatur autem AO. ipsi BF. æquidistanter., ita vt tam LI. quam LT. ipsi AE. chordæ, item MH. MS. chordæ AD. ac sic deinceps sint æquales describetur linea curua ac figura FOQ. quæ *Conicoides primum* dicatur.

Iam vero si ijdem motus fiant in Conicoide primo AOB. vbi chordarum maxima AB. circa verticem A. ita conuertatur vt lineam curuam continuo secet, in punctis B. C. D. E. & recta FO. ita sursum æquidistanter moueatur vt transeat per puncta F. G. H. I. faciatque lineas parallelas FO. GN. HM. IL. ipsis AB. AC. AD. AE. proportionales describet extremum F. lineam curuam AIHGF. quæ vocetur *Conicoides secundum*.



Atque eadem ratione circa Conicoides secundum ijsdem motibus producetur *Conicoides tertium*, & ita deinceps in infinitum.

VII.

M*Otus* quo huiusmodi figuræ producuntur dicatur *ad chordas coniunctas datæ figuræ æquidistanter proportionalis.* Figura autem quæ producitur generatim *Datæ figuræ conchordis*: quod si chordæ parallelæ proportionalibus etiam æquales sint *Datæ figuræ æquichordis* appelletur.

VIII.

INcidentes prima & secunda: *Parallelæ extremæ interiores*, *media*: *Rectæ sibi respondentes* eodem modo dicantur quo in secunda definitione.

IX.

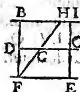
P*Olygona similiter descripta*, in figuris conchordibus eadem ratione definiantur qua quinta definitione huius.

LEMMA. I.

IN tres parallelas duæ rectæ incidentes secantur ab ijs in eadem ratione.

Sint tres parallelæ IB. CD. EF. in quas incidant duæ rectæ ICE. BDF. aut ICE. HGF. ita vt a tribus illis parallelis secentur in I. C. E. & B. D. F. & H. G. F. sintque primum

mum IE. BF. parallelæ. Dico esse vt FD. ad DB. ita EC.ad CI.cum enim parallelæ sint IB. EF. parallelogramma erunt ID. CF. æqualia igitur aduersa latera BD. IC. & DF. CE. Vt igitur FD. ad DB. ita EC. ad CI. 34. 1.

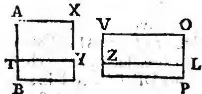


Sed non sint parallelæ dictæ incidentes vt IE. FH. quæ secentur a parallela CD. in C. & G. & ducatur FB. parallela ipsi EI. Dico esse vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Est enim vt FG. ad GH. ita FD. ad DB. & vt FD. ad DB. ita, 2. 6. ex prima parte huius EC. ad CI. ergo vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Quod erat secundo loco probandum.

LEMMA II.

SI duorum rectangulorum æqualium quælibet latera proportionaliter diuidantur: rectæ per illa puncta perpendiculares rectangula in partes inuicem æquales diuidunt.

Sit rectangulum BX. rectangulo VP. æquale, & fiat vt BT. ad TA. ita PL. ad LO. ducanturque TY. ZL. ad AB. OP. perpendiculares, quæ diuidant rectangula illud in alia duo TX. BY. istud in bina ZO. ZP. Dico rectangulum TX. rectangulo ZO. & rectangulum BY. rectangulo ZP. esse æquale. Vt enim BA.



ad AT. ita PO. ad OL. ex hypothesi: sed vt BA. ad AT. 1. 6. ita rectangulum BX. ad rectangulum TX. & vt PO. ad OL. ita rectangulum PV. ad rectangulum LV. vt igitur rectangulum BX. ad rectangulum TX. ita rectangulum PV. ad re-

ctangulum LV. & permutando: æqualia autem ponuntur rectangula BX. PV. igitur æqualia etiam sunt rectangula
3. pronunc. TX. LV. Quare & reliqua BY. PZ. Quod propositum erat demonstrare.

LEMMA III.

SI data vtcumque diuidatur, atque ei vtrimque duæ rectæ adijciantur eandem rationem cum partibus quibus cohærent habentes: rectangulum sub data cum adiunctis & altera adiunctarum, ad rectangulum sub parte cohærente cum eadem adiuncta, & adiuncta, est vt data ad partem quæ cum adiuncta cohæret.

Sit data AB. quæ diuidatur vtcumque in C & adijciantur vtrimque duæ rectæ AD. BE. sitque vt AC. ad CB. ita AD. ad BE. Dico rectangulum DEB. (sub data AB. cum adiunctis AD. DE. & adiuncta qualibet BE.) ad rectangulum CEB. (sub parte CB. cum adiuncta & cohærente eadem BE. & adiuncta BE.) esse vt datam AB. ad partem BC. quæ cum adiuncta BE. cohæret. Quoniam est vt DA. ad BE. ita AC. ad CB. erit permutando, componendo, & iterum permutando, vt DC. ad EC. ita AC. ad CB. & componendo vt DE ad EC. ita AB. ad BC. cum ergo duo rectangula



Schol. 1. 6. DEB. CEB. eandem habeant basim BE. erunt inter se vt altitudines DE. EC. sed DE. ad EC. est vt AB. ad BC. ergo rectangulum DEB. ad rectangulum CEB. est vt AB. ad BC. Quod demonstrandum erat.

LEM-

LEMMA IIII.

PEr datum punctum in peripheria ellipsis contingentem lineam ducere.

Sit in peripheria datæ ellipsis ACG. datum punctum C. per quod oportet ducere rectam quæ ellipsin tangat. Inueniatur axis ellipsis GA. ad quem ordinatim applicetur ex puncto C. perpendicularis CD. & rectæ DA. accipiatur æqualis DE. & hac vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. & connectatur BC. Dico quod recta BC. tangit ellipsin in puncto C. Nam quoniam est vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. erit componendo vt GD. ad DE. id est GD. ad DA. ita GB. ad BA. Quare recta BC. sectionem tangit in C. Igitur per datum punctum in peripheria ellipsis contingentem lineam duximus. Quod erat faciendum.



46.2.Conic.

34.1.Conic.

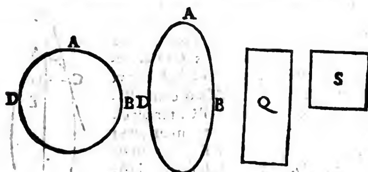
THEOREMA I. PROPOS. I.

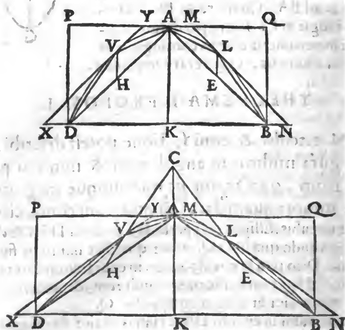
IN circulo, & coni sectione potest describi figura multorum angulorum & numero parium, quæ maior sit quacumque magnitudine minore quam datus circulus, aut coni sectio.

Sit circulus, Ellipsis, Hyperbola, Parabola DAB. & data magnitudo qualibet Q. minor qualibet datarum figurarum. Dico tam in circulo, quam in coni sectionibus posse describi figuram multorum angulorum, & numero parium quæ maior sit data magnitudine Q.

Ac primum in circulo DAB. cum is maior sit magnitudine Q. sit excessus quo dictam magnitudinem superat, ma-

2. 12. magnitudo S. constat ex 2. 12. elementorum tantum posse abscindi ex circulo DAB. inscripta figura multorum angulorum, & numero parium, vt relinquatur quoddam spatium minus ipso S. spatium autem illud quod relinquitur est differentia polygoni inscripti & circuli, & magnitudo S. est differentia magnitudinis Q. & circuli; igitur minori





disse-

differentia distat polygonum a circulo quam magnitudo Q. ideoque maius est polygonum, quam magnitudo Q.

Sit secundo ellipsis DAB. maior eadem magnitudine Q. excessu magnitudinis S. manifestum est ex positione Archimedis propositione 5. de Conoidibus & sphæroidibus; sed euidentius, ex Commentarijs Federici Commandini in eandem propositionem, in Ellipsi posse inscribi figuram multorum angulorum, & numero parium cuius residuum seu differentia ad Ellipsim sit minor differentia S. qua eadem Ellipsis superat datam magnitudinem Q. atque adeo polygonum inscriptum esse maius data magnitudine Q.

Sit tertio Parabola aut Hyperbola DAB. cuius diameter AK. basis seu ordinatim applicata DB. vertex A. & in Hyperbola centrum C. Inscribatur triangulum DAB. constat spatium illud maius esse quam sit dimidium spatij sectione DAB. contenti. Nam si per punctum A. duxerimus tangentem PQ. parallelam scilicet ipsi DB. cui occurrant ex D.B. perpendiculares DP. BQ. fiet parallelogrammum DPQB. cuius dimidium est triangulum DAB. spatium vero sectione Parabolica aut Hyperbolica contentum DAC. minus est quam figura quadrilatera circumscripta DQ. Igitur inscripta figura seu triangulum DAB. maius est quã ipsius dimidium. Rursus rectæ DA. BA. bifariam diuidantur in H. & E. & in Parabola sit VH. diametro KA. æquidistans quæ secet parabola in V. & EL. eidem diametro æquidistans secans Parabolam in L. In Hyperbola vero ducantur ex centro C. rectæ CVH. CLE. secantes etiam Hyperbolam in V. & L. manifestum est ex conuertentibus 46. & 47. 1. Conicorum, lineas YVX. & MLN. tangentes sectiones in V. L. & ipsi DB. PQ. occurrentes in punctis Y. X. & NM. ipsis DA. BA. æquidistare: ideoque parallelogramma esse XA. NA. quare ductis rectis AV. VD. & AL. LB. erit AVD parallelogrammi XA. & ALB. parallelogrammi NA. dimidium, & ob id maius quam dimidium portionis Parabolæ vel Hyperbolæ quæ circa

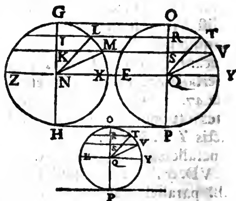
[Margin notes: 17.1. Conic. — 41. 1. — Conuert. 46. 47.1. Conic. — 41. 1.]

circa ipsum describitur. Atque idem demonstrabitur in alijs triangulis in infinitum:quod quidem semper fiat dum
1. 10. relinquantur quædam sectionum portiones quæ sint minores excessu S. quo Parabola vel Hyperbola datam magnitudinem Q. superat: rursus enim vt in priori parte huius sequetur, Parabolam vel Hyperbolam minori excessu differre a polygono inscripto quam à magnitudine Q. ideoque polygonum esse maius data magnitudine Q. Igitur in circulo & coni sectione potest describi &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA II. PROPOS. II.

Potest ad datum circulum motus æquidistanter proportionalis ita fieri, vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas secant sint proportionales.

Inter duas parallelas GO. HP, ducatur incidens perpendicularis GH.circa quam centro N.descriptus sit circulus GLM. ac inter easdem parallelas,aut diuersas HP.CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. moueatur GO. παραλλήλως ipsi HP. ita vt perueniat ad puncta I.& K. in incidente GH. & ad puncta R.S. in incidente OP. quæ est inter easdem parallelas,seceťque circulum in punctis L.M. constat ex Lemmate 1.huius duas GH. OP. secari, a parallelis IR.KS. propor-



tio-

tionaliter: aut si non sit inter easdem parallelas, sint sectæ GH. OP. in eadem ratione, in I. K. & R.S. ac moueatur GO. parallela ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. ita progrediatur in S. Diuisa bifariam OP. in Q. describatur centro Q. circulus OTV. quem secent parallelæ IR. KS. productæ in punctis T. V. & connectantur QT. QV. Item NL. NM. Dico motum lineæ GO. versus HP. aut linearum GO. HP. esse motum ad datum circulum GLM. æquidistanter proportionalem, ita vt quæ proportio est HI. partis incidentis ad IL. tangentem quæ illam secat, eadem sit PR. partis proportionalis incidentis ad RT. tangentem proportionalem. Cum enim sit positione vt HI. ad IG. ita PR. ad RO. erit componendo vt HG. ad IG. ita PO. ad RO. & antecedentium dimidia, vt NG. ad IG. ita QO. ad RO. & per conuersionem rationis vt GN. hoc est LN. ad NI. ita OQ. id est TQ. ad QR. Cum ergo in triangulis LIN. TRQ. anguli ad I. R. sint recti, ac proinde reliquorum angulorum L. T. vterque minor recto, erunt Corol. 1. 17. triangula NIL. QRT. æquiangula angulosque æquales 7. 6. habebunt ILN. RTQ. & INL. RQT. Erit igitur vt NI. ad 4. 6. IL. ita QR. ad RT. Cum ergo ex hypothesi sectæ sint GH. OP. a parallelis in eadem ratione, erit vt HI. ad IN. ita PR. ad RQ. & vt IN. ad IL. ita ostensum est esse QR. ad RT. igitur ex æquali, vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. atque eodem modo probabimus æquiangula esse triangula KNM. SQV. & angulos KMN. SVQ. & KNM. SQV. esse æquales, item esse vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. Cum igitur æquiangula sint triangula LIN. TRQ. & anguli ad L. T. æquales erit vt NL. id est GN. ad LI. ita TQ. id est 4. 6. OQ. ad TR. & permutando vt GN. ad OQ. ita IL. ad TR. atque eodem modo ex triangulis æquiangulis NKM. QSV. ostendemus esse vt GN. ad OQ. ita KM. ad SV. ergo 11. 5. vt IL. ad RT. ita KM. ad SV. & permutando vt IL. ad KM. ita RT. ad SV. Cum ergo recta GH. duabus rectis

parallelis GO. HP. occurrat, ac sit diameter circuli intra parallelas contenti, & in easdem, aut alias HP. CF. alia recta OP. incidat, moueaturque aut vna parallela GO. aut duæ GO. HP. ex eadem in eandem partem, vt alteri HP. aut CF. sint continuo parallelæ, diuidantque GH. & OP. in easdem rationes, & partes parallelarum IL. KM. partibus RT. SV. sint proportionales, constat ex prima definitione huius, motum illum esse ad datum circulum inter duas parallelas æquidistanter proportionalem, cumque sit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. item vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. patet id quod proponebatur.

1. defin. huius.

COROLLARIVM.

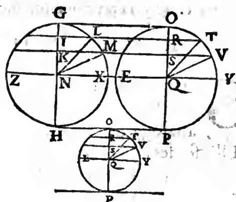
Manifestum est ex dictis in propositione, si duo circuli inter duas parallelas æqualiter aut inæqualiter distantes descripti fuerint, & puncta contactus diameter coniungat, per quæ parallelæ ducantur quarum altera versus alteram in vtroque circulo ita moueatur vt partes ex diametris eiusdem rationis abscindat: primo arcus quos in motu abscindunt continuo esse similes, secundo esse vt sinus seu chordas arcuum in vno circulo, ita sinus & chordas in altero circulo; denique esse partes incidentium ad partes parallelarum in vno circulo vt in alio: seu esse sinus versos ad sinus rectos in eadem proportione in vtroque circulo. Nam ex eo quod parallelæ GO. HP. motu secent diametros GH. OP. in easdem rationes in circulis GLM. OTV. probatum est angulos INL. RQT. item KNM. SQV. esse æquales, quare arcus GL. OT. item arcus GM. OV. similes sunt: præterea ostensum est esse vt IL. ad KN. ita RT. ad SV. denique vt HI. ad IL. ita PR. ad RT.

Schol. 22. 3.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ad datum circulum motu æquidistanter proportionali figura analoga describatur, ita vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas secant, sint proportionales: figura analoga circulus erit.

Sit eadem synthesis quæ in superiori propositione, idemque schema, nempe inter duas parallelas GO. HP. ducatur incidens perpendicularis GH. circa quam centro N. descriptus sit circulus GLM. ac inter easdem parallelas, aut diuersas HP. CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. Moueatur GO. æquidistanter ipsi HP. ita vt perueniat ad quælibet puncta I. K. N. in incidente GH. & ad puncta R. S. Q. in incidente OP. quæ est inter easdem parallelas,



secetque circulum in punctis L. M. X. constat ex Lemm. 1. huius duas GH. OP. secari a parallelis IK. KS. proportionaliter: aut si non sit inter easdem parallelas, sint rectæ GH. OP. sectæ eadem ratione in I. K. N. & R. S. Q. &c. moueatur HO. parallela, ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. ista progrediatur in S. cum illa in N. centrum, hæc in Q. & parallelæ

RT. SV. QY. parallelis IL. KM.NX. sint proportionales, (qui motus primæ definitioni congruit) sitque vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. (hoc enim fieri posse in superiori propositione ostensum est) describaturque figura OTV. Dico figuram OTV. esse circulum. Cum enim motu æquidistanter proportionali sectæ sint proportionaliter HG. PO. erit vt NI. ad HI. ita QR. ad PR. sed vt HI. ad IL. ita supponitur PR. ad RT. ergo ex æquali vt NI. ad IL. ita QR. ad RT. quare cum recti sint anguli ad IR. æquiangula erunt triangula LNI. TQR. vt igitur LN. ad NI. ita TQ. ad QR. & vt NI. ad NG. ita QR. ad QO. ex descriptione, ergo ex æqualitate, vt LN. ad NG. ita TQ. ad QO. æquales autem sunt LN. NG. æquales igitur sunt QT. QO.. Atque eadem ratione ostendentur æquales VQ. QO. & quotquot ex Q. puncto ad perimetrum OTV. ducentur. Igitur figura OTV. circulus est. Quod erat demonstrandum.

1. definit. huius. 6. 6. 4. 6. defin. 1. huius. 15. defin. 15. defin.

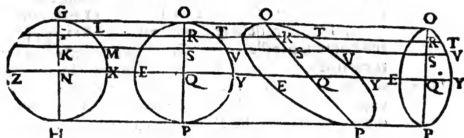
THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI motu ad datum circulum inter duas parallelas æquidistanter proportionali figura analoga describatur, ea aut circulus erit, aut Ellipsoides.

Inter duas parallelas GO- HP. ducta sit ad vtramque perpendicularis HG. circa quam descriptus sit centro N. circulus GLM. ac inter easdem aut diuersas parallelas circa incidentem secundam OP. motu ad circulum GLM. proportionali descripta sit figura analoga OTV. Dico illam figuram aut esse circulum, aut Ellipsoides.

Sit primum incidens OP. peependicularis ad extremas parallelas (vt patet in secunda & quarta figura) & ducantur quælibet IL. KM. NX. parallelæ interiores in circulo GLM. quibus in figura OTV. respondeant proportionales

tionales parallelæ RT. SV. QY & ſint etiam primo partes 2. huius.



incidentium proportionales, partibus parallelarum proportionalium proportionales, nempe vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. erit figura OTV. cirulus. 3. huius.

Sit ſecundo OP. perpendicularis ad extremas parallelas, ſiue illæ eædem ſint ſiue diuerſæ, ſed partes incidentium proportionales partibus parallelarum proportionalium analogæ non ſint, nempe non ſit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Dico figuram OTV. non eſſe circulum. Si enim aliter aſſeratur, ſit ſi fieri poſſit circulus, ergo ex Coroll. ſecundæ huius erit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. quod eſt abſurdum ponitur enim non eſſe vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Corol. 2. huius.

Denique incidens PO. non ſit ad extremas parallelas perpendicularis ſed obliqua, vt patet in penultimo ſchemate, faciatque cum extremis parallelis angulos non rectos. Dico illam non eſſe circulum. Sit enim ſi fieri poteſt circulus.

Quoniam rectæ PQ. QO. rectis æqualibus HN. NG. proportionales ſunt, etiam inter ſe ſunt æquales, & rectæ EQ. QY. rectis ZN. NX. æqualibus proportionales, etiam ſunt æquales, centrum igitur circuli eſt punctum Q. (ſi enim centrum non eſſet duæ rectæ EY. OP. ſeſe mutuo ſecantes non per centrum extenſæ ſeſe mutuo bifariam non ſecarent, quod eſt abſurdum, cum probatum ſit eas ſeſe bifariam ſecare) eiuſque diameter PO. Rurſus manife- 4. 3.

nifestum est figuram analogam OEPY; quæ circulus dicitur, totam intra parallelas AO. CP. quorum motu facta est, contineri: si enim pats eius esset supra O. pars infra P. illa pars non esset descripta motu parallelæ AO. quæ ponitur motu esse parallelλῶς ab GO. in HP. quod est contra rationem descriptionis, & definitionem primam huius: igitur
11. 3. figura dicta tangitur a parallelis AO. CP. in punctis O. P. ergo diameter PO. ad extremam tangentem GO. perpendicularis est: quod esse absurdum, cum ponatur obliqua; non igitur figura OTV. circulus est: sed quia ea, vt & superiores quæ circuli non sunt paulatim a puncto O. dilatantur vsque ad parallelam mediam EY. hinc rursus coarctantur dum in punctum P. desinant & claudantur, formam ellipsis præseferunt, quapropter figuram hanc, donec naturam eius explorauerimus, vocabimus *Ellipsoides*.

Igitur si motu ad datum circulum &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat si motus sit huiusmodi qualis describitur tertia huius, figuram analogum esse circulum; secus nunquam esse circulum; & incidente ad extremas parallelas existente obliqua, figuram analogam circulum non esse.

SCHOLIVM, AC DEFINITIONES secundæ.

Figura analoga quæ motu ad circulum æquidistanter proportionali procreatur, aut Circulus est aut Ellipsoides: circulus aut intra easdem parallelas aut intra diuersas: si intra easdem parallelas producatur, patet esse dato æqualem, cum æqualem dato diametrum habeat; si intra diuersas & maior & minor esse potest. Rursus ellipsoides aut inter easdem parallelas continetur, aut diuersas; & vtroque modo

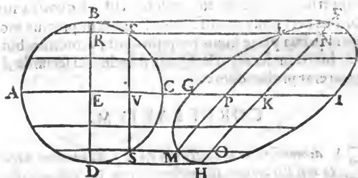
aut

aut incidentem ad extremas parallelas rectam habet, aut obliquam; ac denique parallelas proportionales aut parallelis dati circuli aequales habet, aut inaequales. Ellipsoides cuius incidens ad extremas parallelas recta est dicatur Ellipsoides rectum: *id vero cuius incidens obliqua, vocetur* Ellipsoides obliquum. *Si parallelae proportionales aequales sint appelletur* Ellipsoides Æquichorde; *si inaequales* Diuersichorde.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI incidenti secundae parallela intra ellipsoides ducatur: ea à parallela media bifariam secabitur.

Describatur circulus ABCD. ac ellipsoides quodcumq; FGHI. modo in prima definitione huius tradito; siue inter easdem parallelas BF. DH. siue diuersas; at sint primum inter easdem, sitque incidentium prima BD. secunda FH. illa diameter circuli ad BF. recta; ita aut recta aut obliqua;



parallelarum media EK. transiens per centrum circuli E. & ipsam FH. secans in K. peripheriam circuli in C. ellipsoidis in G. ipsi autem FH. parallela ducatur LM. secans periocham ellipsoidis in punctis L.M. & parallelam mediam

in

in puncto P. Dico rectam L.M. à recta KE. bifariam secari in P. Ducantur per puncta L.M. duæ parallelæ interiores IN. MO. proportionales parallelis in circulo RT.QS. quarum illæ incidentium secundam secent in N.O. istæ circuli diametrum in R. Q. peripheriam in T.S.& iungatur TS. secans EK. in V. Quoniam parallelæ sunt ON.
Definit. 1. huius. ML. ex hypotesi: item LN.MO. ex definitione prima huius, seu descriptione ellipsoideos, parallelogrammum est
Definit 35. LMON. quare æqualia sunt aduersa latera MO. LN.Sed
34. 1. MO.LN. sunt parallelæ proportionales ipsis QS. RT. ex definit. 1.huius:æquales igitur sunt QS. RT. sed sunt &
33. 1. parallelæ, ex eadem definit. Igitur etiam parallelæ sunt
29. 1. BD.TS. Igitur anguli BEV. & TVE. sunt æquales; ille autem rectus est ex definitione 1. huius; quare & iste rectus est, secatque EV. rectam TS. bifariam in V. vt au-
3. 3. Lem. 1. huius. tem SV. ad VT. ita MP. ad PL. Igitur etiam recta ML. diuiditur bifariam in P. atque idem demonstrabitur de qualibet alia parallela ipsi FH.

Sed circulus datus atque ellipsoides analogum non sint inter easdem parallelas. Inter parallelas BF. DH. inter quas ellipsoides describitur, motu ad datum circulum
2.3.& 4.huius. proportionali describatur circulus ABCD. quod ex superioribus fieri posse manifestum est; eodem prorsus modo quo in prima parte huius propositionis, demonstrabimus ML. bifariam secari in P. Quare si incidenti secundæ,&c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

I. *Ex demonstratis manifestum est si LM. ponatur parallela ipsi FH. etiam illi respondentem TS. esse parallelam*
II. *ipsi BD. & cum illa bifariam secetur in P. hanc bifariam secari in V. cumque æquales sint PK. LN. item RT. EV. & pro-*
III. *portionales LN. RT. etiam proportionales esse PK. EV. ea pro-*
IV. *portione qua est RT. ad LN. Ideoque cum sit ex hypothesi vt*

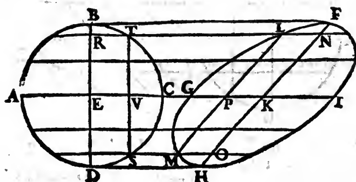
RT.

RT. ad EC. ita LN. ad GK. ac conuertendo & permutando vt EL. totum ad GK. totum, ita RT. id eſt EV. pars ad LN. id eſt KP. partem, & reliquum VC. ad reliquum PG. erit vt totum EC. ad totum KG.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

IN Ellipſoide quolibet incidens ſecunda, & parallelarum media ſunt diametri coniugatæ.

SIT idem ellipſoides quod ſuperiori propoſitione FGHI. in quo incidens ſecundaria, circa quam deſcriptum eſt, ſit FH. parallelarum media GI. intra ellipſoides contenta. Dico FH. GI. eſſe diametros figuræ coniugatas. Nam quia recta FH. diuidit omnes parallelas interiores bifariam, ex definitione prima huius, ſeu ex deſcriptione, erit ipſa diameter ellipſoidis, per 10. definitionem primi Conicorum Apollonij. Item quia parallela media GI. diuidi omnes parallelas incidentis ſeu diametri FH. bifa- defin. 1. huius. defin. 10. 1. Conic. 5. huius.



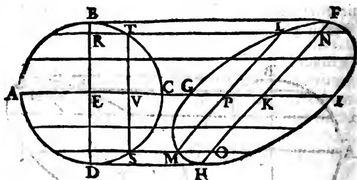
riam, erit & ipſa, ex eadem definitione, diameter. Inſuper quia vtraque FH. GI. diameter eſt, & FH. parallelas ipſius GI. & GI. parallelas ipſius FH. bifariam ſecat, erunt ex definit. 17. 1. Conicorum FH. GI. diametri coniugatæ. Vocetur autem incidens FH. *Diameter prima*: parallela- Definit. 17. 1. Conic. Definitio: diameter prima quid, quid ſecunda.

rum media GI. *Diameter secunda*. & punctum K. centrum.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Ellipsoidos diametrum primam quælibet parallelarum interiorum ita secat, vt quadratum primæ diametri ad quadratum secundæ, sit vt rectangulum partibus primæ diametri contentum ad quadratum dimidiæ parallelæ interioris primam diametrum secantis.

In schemate superiorum propositionum diametros primas ellipsoidis & circuli FH. BD. secet parallela interior RN. illam in N. istam in R. illius primetrum in L. istius



peripheriam in T. Dico esse quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum NL.
Lem. 7. huius. Quoniam proportionales sunt duæ BR. RD. duabus FN.
7. definit. 6. NH. erunt rectangula BRD. FNH. similia; & eandem ob causam similia erunt rectangula BED. FKH. Item quia proportionales sunt RD. ED. ipsis NH. KH. a quibus rectilinea BRD. BED. & FNH. FKH. similia similiterque
22. 6. descripta sunt: erit vt rectangulum BRD. ad rectangulum

lum BED. ita rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. Ad hæc quia eſt vt RT. ad EC. ita LN. ad KG. erit vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita quadratum LN. ad quadratum KG. ſed vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita rectangulum BRD. ad rectangulum BED. (æqualia enim ſunt rectangula BRD. BED. quadratis RT. EC.) & vt rectangulum BRD. ad rectangulum BED. ita oſtenſum eſt rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. vt igitur quadratum LN. ad quadratum GK. ita rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. id eſt ad quadratum FK. & conſequentium quadrupla vt quadratum LN. ad quadratum GI. ita rectangulum FNH. ad quadratum FH. & conuertendo ac permutando erit quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod erat demonſtrandum.

1. defin. huius. 22. 6. 35. 3. 11. 5. 15. 5. & Schol. in 20. 6.

Quod ſi circulus datus atque ellipſoides analogum non ſint inter eaſdem parallelas: eodem modo quo in quinta huius, inter parallelas BF. DH. inter quas ellipſoides deſcribitur, motu ad datum circulum proportionali deſcribatur circulus ABCD. quod ex ſuperioribus conſtat fieri poſſe; eadem prorſus ratione qua in prima parte huius propoſitionis demonſtrabimus eſſe vt quadratum FH. ad quadratum GI. ita rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod ad perfectam demonſtrationem addendum erat.

2.3. & 4. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Ellipſoidos diametrum ſecundam quælibet ordinatim applicatarum ita ſecat, vt quadratum ſecundæ diametri ad quadratum primæ, ſit vt rectangulum ſub partibus primæ diametri, ad quadratum ordinatim applicatæ.

In ſuperiori ſchemate ex quocumque puncto L. ad ſecundam diametrum GI. applicetur ordinatim recta LP.

quæ producta secet perimetrum ellipsoideos in M. Dico
Coro'. 5. huius. esse vt quadratum GI. ad quadratum FH. ita rectangulum
IPG. ad quadratum PL. Quoniam est vt EC. ad CV. ita
KG. ad GP. ex Coroll. 5. huius, & antecedentium dupla
AC. ad CV. vt IG. ad GP. erit diuidendo & conuertendo
CV. ad VA. vt GP. ad PI. erunt igitur rectangula CVA.
6. huius. GPI. similia: & cùm sit vt CE. ad EA. ita GK. ad KI. proportio
videlicet æqualitatis, erunt rectangula CEA. GKI.
similia: item quia proportionales sunt VA. EA. ipsis PI.
KI. vt modo probatum est, a quibus rectilinea similia, similiterque
descripta sunt CVA. CEA. in circulo, & GPA.
22. 6. GKI. in ellipsoide: erit vt rectangulum CVA. ad rectangulum
CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI.
Lemm. 1. huius. præterea quia est vt VT. id est ER. ad EB. ita PL. id est
22. 6. KN. ad KF. erit vt quadratum TV. ad quadratum BE. ita
quadratum LP. ad quadratum FK. sed vt quadratum TV.
ad quadratum BE. ita rectangulum CVA. ad rectangulum
35. 3. CEA. (æqualia enim sunt rectangula CVA. CEA. quadratis
TV. BE.) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum
11. 5. CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI. vt igitur
quadratum LP. ad quadratum FK. ita rectangulum GPI.
15. 5. & Schol. in 20. 6. ad rectangulum GKI. id est ad quadratum GK. & consequentium
quadrupla vt quadratum LP. ad quadratũ FH.
ita rectangulum GPI. ad quadratum GI. & conuertendo
ac permutando erit quadratum GI. ad quadratum FH. vt
rectangulũ IPG. ad quadratum PL. Quod erat probandũ.

Si vero circulus datus, atque ellipsoides analogum non sint inter easdem parallelas, idem ostendetur contingere, eodem modo quo in fine præcedentis demonstratum est.

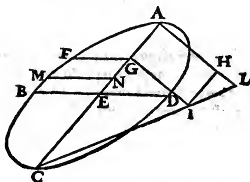
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in linea ellipsoide coniugatæ diametri sint, & fiat vt diameter prima, ad secundam, ita secunda ad aliam quampiam; quæ à se-

ctione

ctione ad diametrum ordinatim applicata est poterit spatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & sectionem interijcitur, & deficiens figura simili ei quæ diametro ipsa & tertia proportionali continetur.

Sit ellipsoides ABCD. cuius diametri coniugatæ AC. BD. prima AC. secunda BD. & fiat vt AC ad BD. ita BD. ad AL. Apteturque AL. ipsi AC. ad angulos rectos,& iuncta CL. applicetur FG. ordinatim ad BD. & ducatur GI. ipsi AL. æquidistans & HI. parallela rectæ AG. Dico quadratum FG. æquale esse rectangulo AI. Est enim vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita recta CA. ad rectam AL. Cum



enim sint continue proportionales AC. BD. AL. ex constructione erit vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita CA. ad AL. hoc est CG. ad GI. (sunt enim triangula CAL. CGI. similia ob parallelas GI. AL.) vt autem quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. Quare rectangulum CGA. ad quadratum FG. est vt CG. ad GI. Vt autem CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI. (posita enim communi altitudine GA. erit vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI.) seu rectangulum AI. Ergo quadratum FG. æquale est rectangulo AI. quod adiacens tertiæ proportionali AL. latitudinem habet AG & deficit figura LHI. ipsi LAC. simili. Ve-

Cor. 20 6. 4. 6.
Corol. 4. 6.
7. huius.
1. 6.
9. 5.

Quid sit transuersum figuræ latus, quid rectum.

Vocetur autem AC. transuersum figuræ latus, & AL, latus rectum.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifestum est rectangulum CGA. ad quadratum FG. esse vt transuersum figuræ latus AC. ad rectum AL. probatum enim est esse vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. vt autem CG. ad GI. ita est CA. ad AL. vt ergo CA. ad AL. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG.

COROLLARIVM II.

Ellipsoides est Ellipsis

EX demonstratis aperte constat figuram ellipsoiden esse veram ellipsin. Eodem enim prorsus modo Serenus propositione 16. de sectione cylindri, demonstrat sectionem cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque subcontrarie posita est, neque per axem ducitur, neque æquidistanter ei quod per axem fit parallelogrammo, esse ellipsin.

Et quandoquidem cum Sereno sumimus, in ellipsi lineam iuxta quam possunt quæ à sectione ad diametrum ordinatim applicantur esse eam ad quam secunda diameter eandem habet rationem quam prima diameter ad secundam, id Federicus Commandinus magnus ille Geometra vix vlli antiquorum inferior, demonstrat in Commentario ad propositionem 16. lib. 1. Sereni de sectione cylindri, ad quem lectorem remittimus.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in ellipsoide figura coniugatæ diametri sint, & fiat vt secunda diameter ad primam, ita prima ad aliam lineam: quæ ab ellipsoi-

de ad secundam diametrum ordinatim applicatur poterit spatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam, & sectionem interijcitur, & deficiens figura simili ei quæ secunda diametro & tertia proportionali inuenta continetur.

Sit ellipsoides ABCD. & fiat vt AC. secunda diameter ad DB. diametrum primam ita DB. ad AI. ponaturque AI. ad angulos rectos ipsi AC. deinde ad AC. ordinatim applicetur FE. & ducatur EH. ipsi AI. æquidistans, HG. vero æquidistans ipsi EA. Dico quadratum EF. parallelogrammo AH. æquale esse. Hoc eodem pene modo demonstrabitur quo priori propositione. Quoniam enim vt quadratũ AC. ad quadratum BD. ita linea CA. ad AI. (sunt enim in continua proportione CA. BD. AI. ideoque vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita AC. ad AI.) hoc est CE. ad EH. (sunt enim duo triangula CAI. CEH. ob parallelas AI. EH. similia) & per 8. huius est vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Quare rectangulum CEA. ad quadratum

Corol. 20. 6.

4. 6.

Corol. 4. 6.

8. huius.

EF.

EF. est vt CE. ad EH. vt autem CE. ad EH. ita rectangulum CEA. ad rectangulum HEA. (posita enim communi altitudine AE. erit vt CE. ad EH. ita rectangulum
1. 6. CEA. ad rectangulum HEA.) ergo quadratum EF. æquale est rectangulo AH. quod adiacens tertiæ proportionali AI. latitudinem habens AE. & deficiens figura GHI. simili ei quæ CEH. continetur. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

Constat ex dictis esse vt CA. ad AI. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Est enim rectangulum CEA. ad quadratum EF. probatum habere rationem quam CE. ad
4. 6. *EH. quod est vt CA. ad AI.*

COROLLARIVM. II.

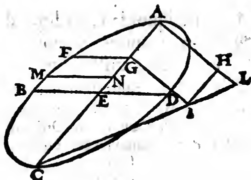
Ellipsoides est ellipsis. *Rursum ex propositione hac efficitur lineam curuam, seu ellipsoidem esse veram ac genuinam ellipsim, cui ea quæ hic demonstrata sunt peculiaria ac propria esse probat Apollonius Pergæus libro primo Conicorum Theoremate 15.*

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

Si in ellipsoide rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta lineis quæ inter ipsas & terminos transuersi lateris figuræ interponuntur, vt rectum figuræ latus ad transuersum; inter se vero vt spatia quæ lineis similiter sumptis continentur.

In

In ſchemate nonæ huius. Sit ellipſoides ABCD. cuius diameter ac tranſuerſum figuræ latus AC. rectum AL. & ad ipſam AC. ordinatim applicentur FG. MN. Dico quadratum FG. ad rectangulum AGC. eſſe vt LA. ad AC. & quadratum FG. ad quadratum MN. eſſe vt rectangulum AGC. ad rectangulum ANC. Quoniam enim



eſt vt quadratum ſecundæ diametri BD. ad quadratum primæ diametri AC. ita quadratum FG. ad rectangulum AGC. & AL. latus tranſuerſum ad AC. erit vt latus rectum ad tranſuerſum, ita FG. quadratum ad rectangulum AGC. Eodemque modo oſtendetur eſſe vt latus rectum ad tranſuerſum ita, quadratum MN. ad rectangulum ANC. Erit igitur vt quadratum FG. ad rectangulum AGC. ita quadratum MN. ad rectangulum ANC. & permutando. Quod erat demonſtrandum.

8. huius.

Coroll. 1. 9. huius.

11. 5.

COROLLARIVM.

Tertium hoc ſymbolum eſt, figuram curuam, de qua agimus eſſe ellipſin; Nam hanc ellipſis proprietatem cum circulo tamen ac hyperbola cõmunem demonſtrauit Apollonius lib. 1. Conic. prop. 21. Cum vero conſtet hanc figuram neque circulum eſſe, neque hyperbolen, conſequitur vt ellipſis exiſtimanda ſit.

Ellipſoides eſſe ellipſim.

Atque his tribus notis contentus fuit Serenus vt ſectionem cylindri ellipſin eſſe probaret, cum tamen aſſereret multo plures ex elementis conicis peti poſſe. Nos adhuc quartam

tam addemus quæ non obſcure propoſitum efficiet.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI in ellipſoide recta linea ducatur per centrum vtrinque ſectioni occurrens ad centrum bifariam ſecabitur.

Sit ellipſoides cuius diameter KM. centrum R. & per R. ducatur ORP. ſecans lineam curuam in punctis OP. Dico OR. ipſi RP. eſſe æqualem. Ordinatim enim applicentur
Coroll. 1. ad 9. huius. OS. PT. & quoniam vt rectangulum KTM. ad quadratum
Coroll. 1. ad 9. huius. TP. ita eſt tranſuerſum latus ad rectum, & vt rectangulum MSK. ad quadratum SO. ita tranſuerſum latus ad rectum, erit vt rectangulum KTM. ad quadratum TP. ita rectangulum MSK. ad qua-
21. 6. dratum SO. vt autem quadratum TP. ad quadratum TR. ita quadratum SO. ad quadratum SR. (nam æquiangula ſunt, imo æqualia triangula PTR. OSR. ob æquales an-
15. 1. gulos ad verticem R.
29. 1. & alternos ad S. & T. item ad P. & O. æquales, cum parallelæ ſint ex deſcriptione OS. TP.) erit ex æquali vt rectangulum KTM. ad quadratum TR. ita rectangulum MSK. ad quadratum SR. & componendo, vt rectangulum KTM. vna cum quadrato TR. ad quadratum TR. hoc eſt quadratum MR. ad quadratum RT. (etenim recta MK. ſecatur bifariam in R. &
5. 2. in partes inæquales ad punctum T. ideoque rectangulum KTM. ſub inæqualibus ſegmentis KT. TM. vna cum quadrato TR. intermediæ ſectionis eſt æquale quadrato dimi-

diæ

diæ MR.) ita rectangulum MSK. vna cum quadrato SR. ad quadratum SR. id est (per eandem quintam secundi elementorum) quadratum KR. ad quadratum SR. & permutando vt quadratum MR. ad quadratum KR. ita quadratum TR. ad quadratum RS. Quare vt MR. ad RK. 22. 6.
ita TR. ad RS. est autem recta MR. rectæ RK. æqualis, ex descriptione: quare recta TR. rectæ RS. æqualis existit, vt 4. 6.
autem TR. ad RS. ita PR. ad RO. (æquiangula enim ostensa sunt triangula TRP. RSO.) Quare PR. & RO. sunt æquales. Quod erat propositum. Hanc autem ellipseos proprietatem demonstrat Apollonius.

SCHOLIVM.

Hactenus quatuor veluti tesseras exhibuit Ellipsoides nostrum quibus sese genuinam ellipsin probaret, vt inter acutanguli coni sectiones reciperetur; tres quidem ex Sereni penu, quartam ex nostra officina depromptam; sed vereor ne si illæ lynceis scupulasi cuiuspiam Geometræ oculis dispiciantur non satis legitimæ videri possint, ac suspicionem mouere possint vsurpati nominis tam a nostra figura, quam a sectione cylindri apud Serenum & Archimedem de Conoidibus, & Sphæroidibus. Esto enim notæ quas Serenus, quas nos adduximus ellipsi conueniant, dubitare quis poterit num soli, & vtrum κυρίως ἴδια *sint* καὶ ἀντιστρέφοντα, *an vero vt in Scholis loquuntur propria tantum primo modo: certe pleraque omnes affectiones quæ in libris conicorum Ellipsi inesse demonstrantur, etiam circulo, multæ hyperbolæ & oppositis sectionibus conueniunt; neque si circuli ac ellipseos differentia ignota esset, recte quis argueret ex affectionibus quas circulus cum ellipsi communes habet illum esse ellipsin. Quis nouit num sectio Cylindri, num Ellipsoides nostrum communione quidem dictorum symbolorum iungatur cum Ellipsi, natura tamen ab ea non minus quam circulus aut opposita sectiones, differat? Scitum est apud Dialecticos propositionem*

Qq 2 *vni-*

vniuersalem affirmantem non simpliciter sed per accidens tantum conuerti in particularem aientem. Nec enim si omnis homo animal est ideo omne animal est homo, neque efficitur si omnis ellipsis hoc habet vt prima diameter sectionis ad secundam eam rationem habeat quam secunda ad aliam quampiam, qua ad secundam applicata ordinatim possit spatium quod adiacet tertia proportionali, & reliqua qua in quinta huius demonstrata sunt, vt ideo quicquid hoc habet protinus sit ellipsis; Quare cum huiusmodi signa occurrunt, plerumq; peritiores Mathematici vtuntur ἀπαγωγῇ εἰς ἀδύνατον *seu abductione ad absurdum qua certo statuunt id de quo dubitabatur; qua demonstratio licet* δεικτικῆ *minus sit* ἐπιστημονικῆ. *ac dignitate concedat, veritate tamen ac certitudine ne hilum quidem inferior est.*

Nos igitur superioribus notis vsi ex contraria assertione manifestum absurdum deriuabimus, atque ita totam rem extra omnem dubietatis aleam constituemus.

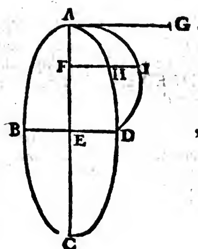
THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

PRopositum sit verè demonstrare, sectionem cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque subcontrarie posita est neque per axem, neque æquidistante ei quod per axem fit parallelogrammo; item Ellipsoides quodcũq; esse Ellipsin.

Sit primum sectio cylindri cuiusdmodi posita est in propositione, & Ellipsoides quodcumque rectum ABCD. cuius prima diameter seu axis AC. secunda diameter seu axis BD. fiatque vt AC. ad BD. ita BD. ad aliam videlicet AG. quæ statuatur ipsi AC. ad angulos rectos, erit (ex ijs
Command. in 16. 1. Sereni. quæ demonstrat Federicus Commandinus commentario iu 16. proposit. Sereni de sectione cylindri, quod etiam se demonstrasse affirmat Serenus in Commentarijs suis in

Apol-

Apollonium, quæ ad nos non peruenerunt) AC. transuersum figuræ latus, & AG. rectum, seu recta iuxta quam possunt quæ à sectione ad diametrum ordinatim applicantur. Iam vero per primam partem 54. 1. in subiecto plano describatur ellipsis ita vt eius diameter sit AC. vertex A. & rectum latus AG. ductæ vero a sectione ad AC. in angulo recto applicentur, quæ latitudines habeant lineas interiectas & punctum A. deficiantque figura simili & similiter posita ei quæ lineis CA. AG. continetur: & diuisa AC. bifariam in E. ducatur secunda seu axis BD. faciens angulos rectos cum BC. Hinc Ellipsis dicta sectioni cylindri aut ellipsoidi recto superimponatur, & congruat AC. ellipsis cum diametro AC. sectionis cylindri aut ellipsoideos recti ipsis æquali: congruet etiam angulus rectus CAG. cum recto, & AG. ellipsis cum æquali AG. sectionis, aut ellipsoidis recti & recta BD. cum BD. & cum centro centrum E. (Nam cum sint æquales EA. AG. tam in ellipsi quam in cylindri sectione, & ellipsoide recto, & inter eas media proportionalis BD. erit BD. ellipsis æqualis BD. sectionis) Ergo aut ellipsis cum sectione, vel ellipsoide congruet, aut certe non congruet: Dicatur primum non congruere; igitur ab illa deficiet, deficiat igitur ad puncta H. I. ductaque FHI. ordinatim applicata ad diametrum AC. secet sectionem cylindri vel ellipsoides & ellipsin in punctis H. I. ita vt arcus AID. sit arcus ellipsis & AHD. arcus sectionis cylindricæ, vel Ellipsoidis.



54. 1. Conicorum.

Quo-

Quoniam in ellipsi ordinatim applicatæ sunt ED. FI. erit vt rectum figuræ latus AG. ad transuersum AC. ita quadratum FI. ad quadratum ED. Rursus quoniam in sectione cylindri vel ellipsoide ordinatim applicatæ sunt FH. ED. erit vt latus rectum AG. ad transuersum AC. ita quadratum FH. ad quadratum ED. Vt igitur quadratum FI. ad quadratum ED. ita quadratum FH. ad quadratum ED. æqualia igitur sunt quadrata FH. FI. pars & totum: quod est absurdum. Non igitur deficit ellipsis a sectione cylindri vel ellipsoide recto: conuenit ergo: quare illi æqualis est.

21.1. Conicorum. 18.1. Sereni de sect. cylindri. 11. 5. 1. pronunc.

Idem eodem modo demonstrabimus etiam in quocumque ellipsoide obliquo, modo ductæ a sectione ad diametrum AC. non applicenrur ad angulos rectos, sed ad angulos æquales ijs quos applicatæ cum diametro efficiunt in ellipsoide obliquo; & per secundam partem 54. 1. Conicorum describatur ellipsis, vt dictum est prima parte huius, cuius diametet AC. vertex A. rectum latus AG. idem quod in Ellipsoide, ac fiat impositio vtriusque figuræ: idem enim absurdum sequetur si illæ non dicantur congruere. Igitur vere demonstratum est sectionem Cylindri quæ neque basibus æquidistat, neque sub contrarie posita est, neque per axem, neque æquidistante ei quod per axem fit parallelogrammo, item ellipsoides quodcumque esse ellipsin.

SCHOLIVM.

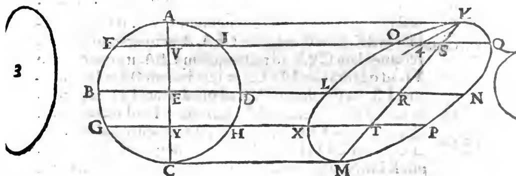
Mutato igitur nomine *Ellipsodea dicantur* Ellipsei Analogæ; *quarum aliæ vocentur* Rectæ *aliæ* obliquæ: *aliæ* Æquichordes; *aliæ* Diuersichordes: *ijsdem scilicet cognominibus quibus Ellipsoidea in Scholio quarta huius distinximus.*

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

QVælibet ellipsis circa quamlibet suarum diametrorum dato circulo, datæque ellipsi est analoga.

Datus sit circulus quilibet Z. & ellipsis 3. & sit quælibet ellipsis KLMN. cuius quælibet diameter KM. centrum R. Dico ellipsim KLMN. circa diametrum KM. dato circulo Z. aut ellipsi 3. esse analogam. Ducantur per puncta K.M. rectæ KA. MC. ellipsim KLMN. contingentes: quoniam Lemm. 4. huius.



recta KM. transit per centrum R. ellipsis, cum ponatur eius diameter, rectæ KA. MC. sibi ipsis æquidistabunt. Inter 27. 2. Coni. duas parallelas KA. MC. ducta ad vtramque perpendiculari AC. describatur circulus ABCD. & & mota AC. motu ad MC. æquidistanti faciat parallelas in vtraque figura FVI. OSQ. & BED. LRN. & GYH. XTP. quæ secentur illic ab AC. in punctis V. E. Y. istic a KM. in punctis S. R. T. Constat in circulo parallelas dictas secari bifariam in punctis V. E. Y. In ellipsi vero KLMN. cum recta 3. 3. LRN. transeat per centrum R. secabitur in R. bifariam 30. 1. Coni. sed & OSQ. bifariam secatur in S. si enim non; secetur

bifa-

bifariam in puncto 4. & ducatur K4. quoniam ellipsim KLMN. contingit KA. in puncto A. & huic æquidistans
7. 2. Coni. O4Q. diuisa est bifariam in puncto 4. erit K4. diameter ellipsis, quod est absurdum cum non transeat per centrum; atque eodem modo probabitur rectam XP. & quamlibet
12. definit. parallelarum ad LN. secari bifariam a diametro KM. or-
1. Conic. dinatim igitur applicantur ad diametrum KM. rectæ
21. 1. Coni. OS. LR. XT. &c. Ergo erit vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita quadratum OS. ad quadratum LR. & vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. (nam cum sit vt MS.
Lemm. 1. huius. ad SK. ita CV. ad VA. erunt rectangula MSK. MVA. si-
1. defin. 6. milia, & ob eandem causam rectangula MRK. MEA. simi-
Lemm. 1. lia. Quare cum sit vt MS. ad CV. ita MR. ad CE. erit vt
huius. rectangulum MSK. ad rectangulum CVA. ita rectangu-
22. 6. 21. 1. Coni. lum MRK. ad rectangulum CEA. & permutando) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. ita quadratum
11. 5. VI. ad quadratum ED. erit vt quadratum OS. ad quadra-
22. 6. tum LR. ita quadratum VI. ad quadratum ED. ideoque
defin. 4. huius. vt recta OS. ad rectam LR. ita recta VI. ad rectam ED.
2. 3. & 4. huius. Quare ellipsis KLMN. circulo ABCD. est Analoga, sed circulus ABCD. circulo Z. etiam analogus est: igitur ellipsis KLMN. dato circulo Z. analoga est circa incidentem seu diametrum KM.

Rursus quia ellipsis 3. ex prima parte huius propositionis, circulo Z. analoga est circa quamlibet suarum diametrorum, & eidem circulo analoga est ellipsis KLMN. circa quamlibet suarum diametrorum, manifestum est ellipses KLMN. & 4. circa quamlibet suarum diametrorum descriptas esse analogas. Quare quælibet ellipsis circa quamlibet &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI motu ad datam Ellipſin æquidiſtanter proportionali figura deſcribatur; ea aut Circulus erit, aut Ellipſis.

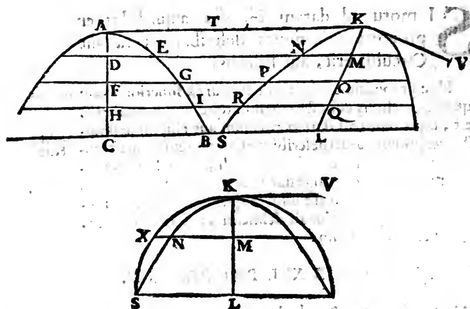
Hæc propoſitio euidenter deducitur ex ſuperiori. Nam quælibet ellipſis cuilibet circulo atque ellipſi analoga eſt, ergo motu ad datum circulum aut ellipſin æquidiſtanter proportionali deſcribitur; Cum autem idem ſit motus quo circulus aut ellipſis data, & ellipſis analoga deſcribuntur; ſi ellipſis analoga ſtatuatur prima atque data; manifeſtum eſt circulum aut ellipſin, quæ data erat, motu æquidiſtanter proportionali delineari ac fieri analogam. Quod erat probandum. 14. huius. 4. defin. huius.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ad datam Parabolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ea erit Parabola.

Inter eaſdem aut diuerſas parallelas AK. CL. data ſit parabola ABC. cuius diameter AC. latus rectum AT. & incidens ſecunda quæcumque KL. moueatur AK. æquidiſtanter ipſi CL. ita vt continuò parallelæ circa KL. ſint proportionales parallelis circa AC. nimirum vt NM. ad PO. ita DE. ad FG. & vt PO. ad RQ. ita FG. ad HI. & vt RQ. ad SL. ita HI. ad CB. atque ita deinceps etiam ex alia parte incidentium; ſecabuntur etiam AC. KL. proportionaliter, ideoque iuxta primam definitionem huius, erit motus ad datam parabolam æquidiſtanter proportionalis: Deſcribatur eo motu figura KSL. quæ erit analoga parabolæ ABC. Dico illam figuram eſſe parabolam. Quo- Lemm. 1. huius. 1. defin. huius. 4. defin. huius.

Lem. 1. & definit. 1. huius. niam sectæ sunt proportionaliter DK. FA. in punctis M. D. erit vt OK. ad MK. ita FA. ad DA: item quia parabola



20. 1. Conic. Definit. 1. huius. est ABC. erit vt FA. ad DA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. Rursus quia proportionales sunt rectæ DE. FG. rectis NM. PO. erit vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. ergo a primo ad vltimum vt recta OK. ad rectam MK. (nempe vt lineæ quæ ob ordinatim applicatis ex diametro ad verticem abscinduntur) ita quadratum PO. ad quadratum NM. nimirum ita sunt inter se quadrata ordinatim applicatarum, quod tanquam parabolæ peculiare demonstrat Apollonius lib. 1. Conic. proposit. 20.

22. 6.

Rursus quadrato NM. fiat rectangulum MKV. æquale & ipsi LK. sit KV. ad punctum K. perpendicularis. Quoniam rectangula MKV. OKV. eandem altitudinem habent K. erunt vt bases MK. OK. sed vt MK. ad OK. ita

1. 6.

paulo

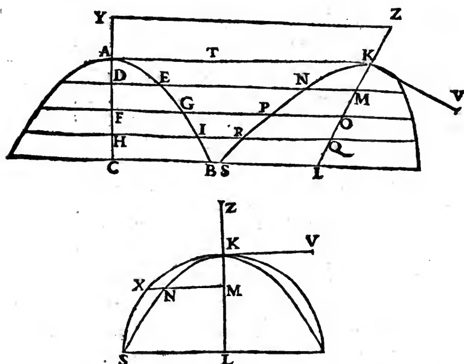
paulo ante ostensum est quadratum MN. ad quadratum OP. vt igitur rectangulum MKV. ad rectangulum OKV. ita quadratum NM. ad quadratum PO. & permutando vt rectangulum MKV. ad quadratum NM. ita rectangulum OKV. ad quadratum PO. æquale autem est rectangulum MKV. quadrato NM. ex hypothesi, igitur æquale erit rectangulum OKV. quadrato PO. atque ita rectangulum QKV. erit æquale quadrato RQ. &c. Quod parabolæ conuenire demonstrat Apollonius 11. primi Conicorum: vocatque KV. Rectum figuræ latus. 11.1.Conic.

Iam vero constat ex 52. primi Conicorum posse inueniri parabolam, cuius diameter sit data KL. vertex punctum K. Ducta vero qualibet SL. à sectione ad diametrum in angulo SLK. possit rectangulum LKV. sub recta LK. & perpendiculari seu latere recto KV. Inuenta iam sit & imponatur dicta parabola figuræ KSL. congruent rectæ LK. parabolæ, & LK. figuræ KSL. cum æquales positæ sint. Item rectæ SL. vtriusque figuræ, cum tam SL. quam angulus SLK. ponantur æqualia: deniq; ob eandem causam conuenient KV. in vtraque figura. Igitur, aut congruent dictæ figuræ, aut non congruent: ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ secet figurã analogam in N. parabolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ; erit rectangulum MKV. æquale quadrato MN. ex secunda parte huius propositionis: idemque rectangulum MKV. æquale quadrato MX. ex 11. 1. Conic. Igitur æqualia sunt quadrata LI. LH. pars & totum: quod est absurdum: congruent igitur Parabola, & figura analoga. Igitur æqualia sunt, ac in vnam figuram coincidunt, estque figura analoga KSL. Parabola. Quod erat demonstrandum. 11.1.Conic. 2. parte huius. 11.1.Conic. 9. 5. 8.pron.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ad datam Hyperbolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur; ea erit Hyperbola.

Sit idem ſchema quod ſuperiori propoſitione, ſed figura ABC. ponatur eſſe Hyperbola, & fiant reliqua vt in præcedenti, tantum Hyperbolæ ABC. accipiatur tranſ-



uerſum latus AY. & ducta YZ. ipſi AK. parallela producatur LK. dum concurrat cum YZ. in puncto Z. Dico figuram analogam KSL. eſſe Hyperbolam; Eſt enim vt YD. ad

Lemm. 2. huius.

ad DF. ita ZM. ad MO. & componendo, & per conuersionem rationis ac permutando vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. sed est etiam vt YF. ad FA. ita ZO. ad OK. & vt YD. ad DA. ita ZM. ad MK. similia igitur sunt rectangula YFA. ZOK. item rectangula YDA. ZMK. cum igitur sit vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. & super prima ac secunda facta sint duo rectangula similia YFA. ZOK. & super tertia & quarta duo itidem similia YDA. ZMK. erit vt rectangulum YFA. ad rectangulum ZOK. ita rectangulum YDA. ad rectangulum ZMK. & permutando vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. sed vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. & vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. igitur vt rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. ita quadratum PO. ad quadratum NM. Lemm. 1. huius. 22. 6. 21. 1. Conic. 22. 6.

Deinde fiat vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. ita ZK. ad KV. Quoniam ostensum est prima parte huius, esse rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. vt quadratum PO. ad quadratum MN. erit conuertendo & permutando vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. id est vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZOK. ad quadratum PO. Atque eodem modo probabimus esse vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZQK. ad quadratum QR. Has affectiones etiam in Hyperbola demonstrat Apollonius I. Conic. prop. 21. Corol. 20. 6.

Constat autem ex 53. 1. Conicorum posse inueniri Hyperbolam cuius latus rectum KV. transuersum KZ. & diameter KL. ducta vero quælibet SL. a sectione ad diametrum in angulo SLK. sit vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZLM. ad quadratum SL. Inuenta iam sit & imponatur dicta Hyperbola figura XSL. congruent rectæ LK. Hyperbolæ, & LK. figuræ, cum æquales positæ sint: Item rectæ SL. vtriusque figuræ, cum tam rectæ SL. quam anguli SLK. ponantur æquales: denique ob eandem causam con-

uenient

uenient KV. in vtraque figura. Congruent ergo dictæ figuræ, aut minime congruent. Ponuntur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ secet figuram analogam in N. Hyperbolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, ZK. latus transuersum, erit ex secunda parte huius propositionis, vt ZK. ad KV. ita re-
21.1.Conic. ctangulum ZMK. ad quadratum MN.& vt ZK. ad KV. ita
9. 5. rectangulum ZMK. ad quadratum MX. æqualia igitur sunt quadrata MN. MX. pars & totum. Quod est absurdum congruent igitur Hyperbola ac figura Analoga, æquales ergo sunt; immo in vnam figuram concidunt, vt proinde figura analoga KSL. sit Hyperbola. Quod erat demonstrandum.

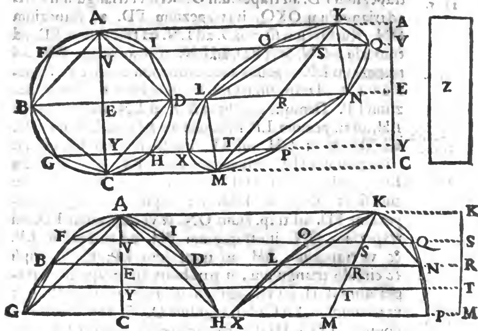
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Polygona in Circulo atque Ellipsi analoga; item in Parabolis aut Hyperbolis analogis intra easdem parallelas similiter inscripta sunt inter se vt parallelæ proportionales.

Inter easdem parallelas AK.CM.descriptus sit circulus ABCD. & Ellipsis analoga KLMN.item duæ aut parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ AC. KM. quorum diametri secundæ BD. LN. eaque secent quotcumque parallelæ proportionales illum FI.BD.GH.istam OQ.LN.XP.connectantur rectis sibi respondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in circulo, & ellipsi similiter descripta, eo modo quo definitione quinta huius traditum est. Dico polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. esse vt proportionalem quamcumque FI. ad proportionalem OQ. Secet diameter AC. rectas FI. BD. GH. in punctis VEY. erit AV. altitudo tam trianguli FAI. quam trianguli OKQ. eo

quod

quod sint inter easdem parallelas: itemque recta VE. erit altitudo trapeziorum FD. ION. & EY. altitudo trape-



ziorum BH. LP. denique YC. altitudo triangulorum in circulo & ellipsi, & in parabola, & Hyperbola vltimorum trapeziorum GCH. XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ eandem habent altitudinem, erunt inter se vt bases, quare vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rursus quia trapezia FD. ON. habent latera FI. BD. proportionalia lateribus OQ. LN. erunt inter se vt rectangula sub BD. EV. & sub LN. EV. sed rectangula sub BD. EV. & LN. EV. sunt inter se vt bases BD. LN. vt igitur BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. eodem modo ostendemus esse vt GH. ad XP, ita trapezium BH. ad trapezium LP. &

1. 6.

36.4. huius.

1. 6.

trian-

triangulum GCH. ad triangulum XMP. Cum igitur sit vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. sit
defin. 1. huius. autem vt FI. ad OQ. ita BD. ad LN. & vt BD. ad LN. ita
11. 5. trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Rursus cum sit vt BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt BD. ad LN. ita trapezium BH. ad
11. 5. trapezium LP. vt paulo ante probatum est, erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Denique cum sit vt BD. ad LN. ita trapezium
1. definit. huius. BH. ad trapezium LP. sit autem vt BD. ad LN. ita GH. ad XP. & vt GH. ad XP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. erit vt trapezium BX. ad trapezium
11. 5. LP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. Quare cum sit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt trapezium BH. ad trapezium LP. ita in ellipsi & circulo triangulum, in parabolis aut Hyperbolis trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum poly-
12. 5. gonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMPNQ. sed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita ostensum est esse FI. ad OQ. Vt igitur FI. ad OQ. parallela proportionalis ad proportionalem ita polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Ex dictis constat polygona in circulo atque ellipsi analoga inter easdem parallelas similiter descripta esse vt secundas diametros. Nam vt FI. ad OQ. ita polygonum ad
1. defin. huius. *polygonum. sed vt FI. ad OQ. ita diameter secunda BD. ad secundam LN. Vt igitur BD. ad LN. ita polygonum ad polygonum.*

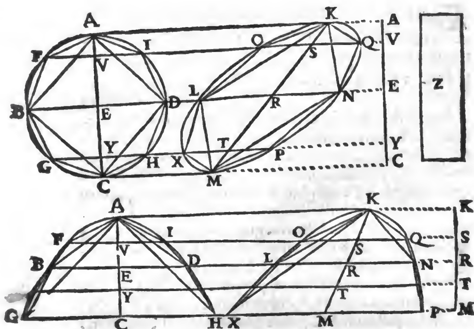
THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

Polygona in Circulo atque Ellipsi : Parabolis item & Hyperbolis analogis inter diuersas parallelas motu æquidistanter & æqualiter proportionali procreatis similiter descripta inter se sunt vt altitudines.

Sint eadem quæ superiori propositione, sed figuræ analogæ non sint inter easdem parallelas, sintque motu æquidistanter & æqualiter proportionali procreatæ, ita vt rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS. SQ. sint æquales,& BE. ED. ipsis LR.RN. atq; ita in deinceps, quæ connectantur rectis sibi inuicem respondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in ellipsi & circulo;item in parabolis & Hyperbolis analogis, eo modo quo definitione 5. huius traditum est. Dico polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXM. esse vt altitudinem figuræ CA. ad altitudinem figuræ MK. Secet recta quæpiam AC. rectas FI. BD. GH. bifariam in punctis V. E. Y. sitque ad angulos rectos parallelis extremis, erit AV. altitudo trianguli FAI. VE. altitudo trapezij FD. & EY. altitudo trapezij BH. & YC. altitudo trianguli in circulo ; in Parabola vero aut Hyperbola vltimi trapezij GCH. Ita sit KM. ad angulos rectos parallelis extremis,& KM. diameter secet parallelas proportionales OQ. LN. XP. bifariam in punctis S. R. T. erunt KS. SR. RT. altitudines trianguli, & trapeziorum OKQ. ON. LP. & TM. altitudo trianguli XMP. in ellipsi; in Parabola vero aut Hyperbola trapezij XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ. æquales habeat bases, ex hypothesi, erunt inter se vt altitudines: quare vt AV. ad KS. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rursus quia trape- Corol. 1. 6.

ziorum FD. ON. æqualia sunt latera parallela FI. BD. la-
28. quarti. teribus OQ. LN. sunt inter se vt altitudines VE. SR. Eo-



dem modo ostendemus vt EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt YC. ad TM. ita triangulum, aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP.
defin. 1. huius. Cum igitur sit triangulum FAI. ad triangulum OKQ. vt AV. ad KS. & vt AV. ad KS. ita VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Item cum sit trapezium FD. ad trapezium ON. vt VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita EY. ad RT. & vt
3. Lemm. huius. EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Atque eadem ratione ostendemus esse vt tra-

trapezium BH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. Quare cum sit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium FH. ad trapezium LP. & vt trapezium FH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt 12. 5.
triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum polygonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMPNQ. sed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita AV. ad KS. vt modo probatum est, & vt AV. ad KS. ita AC. ad Lemm. 1. huius.
KM. vt igitur AC. altitudo ad altitudinem KM. ita polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonstrandum.

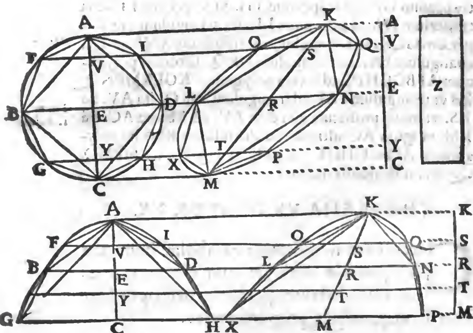
THEOREMA XX PROPOS. XX.

Circuli atque Ellipses: Parabolæ item, aut Hyperbolæ analogæ inter easdem, aut æqualiter distantes parallelas descriptæ sunt inter se vt parallelæ proportionales.

Inter easdem parallelas AK. CM. descripta sint circulus ABCD. & ellipsis analoga KLMN. & Parabolæ aut Hyperbolæ AC. KM. quorum parallelæ quælibet proportionales FI. OQ. Dico esse vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad ellipsin KLMN. & Parabolam aut Hyperbolam AC. ad Parabolam aut Hyperbolam KM. Si enim non ita sit; sit vt ad OQ. ita circulus aut Parabola aut Hyperbola data ABCD. ad aliquam aliam magnitudinem quæ sit Z. quæ vel minor erit, vel maior ellipsi vel Parabola, vel Hyperbola analoga KLMN. si enim esset æqualis, haberet circulus ABCD. ad ellipsin KLMN. eandem proportionem, at 7. 5.
propterea esset circulus ad ellipsin vt FI. ad OQ. quod non supponitur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor quam

 ellipsis

1. huius. ellipsis KLMN. atque idem dicendum in Parabolis aut Hyperbolis: Inscribatur ellipsi & Parabolæ, ac Hyperbo-



læ analogæ KM. figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior sit magnitudine Z. minore quam ipsa Ellipsis aut Parabola aut Hyperbola data sitque dicta figura KOLXMPNQ. Hinc circulo ABCD. inscribatur Polygonum similiter polygono ellipseos quod sit AFBG CXDI. (ac quod de ellipsi dicitur intelligatur de Parabola & Hyperbola analoga) Quoniam est vt FI. ad OQ.
14 huius. ita polygonum AFBGCXDI. ad polygonum KOLXMP NQ. & vt FI. ad OQ. ita ponitur circulus ABCD. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFBGCHLI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita circulus ABCD. ad magnitudinem Z. & permutando, vt polygonum AFBGCHLI. ad circulum

circulum ABCD. ita polygonum KOLXMPNQ. ad magnitudinem Z. sed polygonum AFBGCHLI. est minus circulo ABCD. igitur & polygonum KOLXMPNQ. est minus magnitudine Z. ostensum autem est & maius: quod est absurdum; non igitur minor est magnitudo Z. ellipsi KLMN. Quo vero modo probauimus non posse esse vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad magnitudinem minorem ellipsi KLMN. ita ostendemus non posse esse vt OQ. ad FI. ita ellipsin KLMN: ad magnitudinem circulo ABCD. minorem, vt euidenter constat. 14. 5.

Sit deinde magnitudo Z. maior ellipsi KLMN. Cum ergo ponatur circulus ABCD. ad Z. esse vt BD. ad LN. erit & conuertendo Z. ad circulum ABCD. vt LN. ad BD. ponatur vt Z. ad circulum ABCD. ita ellipsis KLMN. ad magnitudinem aliquam 3. erit permutando vt Z. ad Ellipsin KLMN. ita circulus ABCD. ad magnitudinem 3. sed Z. ponitur maior quam ellipsis KLMN. ergo maior est circulus ABCD. magnitudine 3. Quare erit vt LN. ad BD. ita ellipsis KLMN. ad magnitudinem 3. minorem circulo ABCD. Quod est absurdum, & contra id quod in fine primæ partis huius probatum, est. Ergo circuli atque ellipses analogæ &c. Quod erat demonstrandum. 14. 5.

Idem sequetur si inter æqualiter distantes diametros circulus atque ellipsis; Parabolæ item atque Hyperbolæ analogæ describantur.

COROLLARIVM.

Hinc constat circulos atque ellipses analogas inter easdem parallelas motu æquidistanter proportionali descriptas esse vt secundas diametros: nam secundæ diametri etiam sunt parallelæ proportionales.

THEO-

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

Circulus & ellipsis analoga; Parabolæ item aut Hyperbolæ analogæ inter diuersas parallelas motu æquidistanter, & æqualiter proportionali descriptæ sunt inter se vt altitudines.

Inter diuersas parallelas descriptæ sint figuræ analogæ, circulus quidem & ellipsis; Parabolæ item Hyperbolæ AC. KM. motu æquidistanter & æqualiter proportionali ita rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS. SQ. sint æquales, & BE. ED. ipsis LR. RN. atque ita deinceps. Dico esse vt altitudinem figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figuram AC. ad figuram KM. Si enim non ita sit; vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita fiat figura AC. ad aliquam aliam magnitudinem quæ sit Z. quæ vel minor erit, vel maior figura KM. si enim esset æ-
7. 5. qualis haberet figura AC. ad figuram KM. eandem proportionem, atque ideo esset figura AC. ad analogam KM. vt altitudo ipsius AC. ad altitudinem ipsius KM. quod non conceditur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor
1. huius. quam figura analoga KM. cui inscribatur, siue ellipsis sit siue Parabola siue Hyperbola, figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior sit magnitudine Z. quæ ponitur minor quam figura analoga KM. & figuræ AC. inscribatur polygonum similiter ei quod in figura KM. quod sit AFBGCHDI. secundum defin. 5. huius, eodem prorsus modo quo in 15. huius, & secunda 12. elementorum sequetur abductione ad absurdum esse AC.
19. huius. KM. figuras inter se, vt altitudines. Nam quia est vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem ipsius KM. ita polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. & vt dicta

alti-

altitudo ad altitudinem, ita ponitur figura AC. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita figura AC. ad magnitudinē Z. & permutando vt polygonum AFBGCHDI. ad figuram AC. ita polygonum KOLXMPNQ ad magnitudinem Z. ſed polygonum AFBGCHLI. eſt minus figura AC. Igitur & polygonum KOLXMPNQ. eſt minus magnitudine Z. oſtenſum autem & maius. Quod eſt abſurdum. Hinc eodem prorſus modo quo in ſecunda parte præcedentis, & in 2. numero duodecimi, oſtendemus magnitudinem Z. non poſſe eſſe maiorem figura KM. Igitur illi æqualis erit. Vt igitur altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figura AC. ad Z. æquale ipſi KM. nempe ad ipſam KM. Quod erat demonſtrandum.

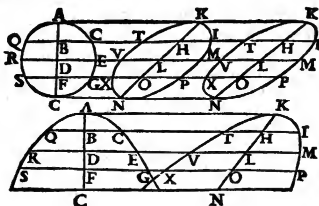
THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Omnes Ellipſes Parabolæ, Hyperbolæ analogæ quæ motu ad datum circulum aut Parabolam aut Hyperbolam & æquidiſtanter, & æqualiter proportionali inter eaſdem parallelas deſcriptæ ſunt, tum figuræ datæ tum inter ſe ſunt æquales: item quarum parallelæ lineæ proportionales ad parallelas datæ figuræ eandem habent rationem, inter ſe ſunt æquales.

Inter duas parallelas AK. CM. deſcriptus ſit circulus, aut Parabola, aut Hyperbola ARCE. cuius diameter ad parallelas recta ſit AC. & motu aut æqualiter ac æquidiſtanter proportionali deſcribantur quotlibet ellipſes aut Parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ KVNM. ita nimirum vt omnes parallelæ proportionales circuli parallelis ellipſium ſint æquales, vt ipſæ QB. BC. in circulo ipſis TH. HI. in ellipſi: item RD. DE. ipſis VL. LM. atque ita deinceps:

aut

ut certe secundæ diametri ellipsium VM. VM. habeant eandem rationem ad diametrum circuli RE. vel AC. atque



eodem modo in Parabolis & Hyperbolis. Dico in primo casu ellipses KN. tum inter se, tum circulo esse æquales; in secundo easdem ellipses esse inter se æquales: atque eadem ratione Parabolas aut Hyperbolas KN. analogas tum inter se tum datæ AC. esse æquales; in secundo easdem inter se esse æquales. Nam cum in primo casu parallelæ proportionales TI. aut VM. in ellipsi, parallelis QC. aut RE.
10. huius. circuli sint æquales, sint autem circuli & ellipses analogæ
1. pronunc. inter easdem parallelas vt parallelæ proportionales; manifestum est circulum AC. cuiuis ellipsium, ipsasque inter se esse æquales. Quod si earumdem ellipsium parallelæ proportionales VM. ad parallelam RC. eandem habeant
9. 5. rationem, erunt æquales inter se; cum autem sint ipsæ ad circulum vt parallelæ proportionales ad parallelas circuli: manifestum est ipsas ad circulum eandem habere ratio-
9. 5. nem, ideoque esse inter se æquales. Atque eadem sequuntur in Parabolis & Hyperbolis analogis. Quod erat demonstrandum.

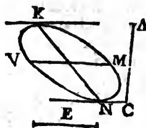
THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Ellipsis dato circulo analoga inter diuersas parallelas descripta eam ad circulum rationem habet, quam secunda diameter ellipsis ad rectam quæ altitudini ellipsis & altitudini seu diametro circuli sit tertio loco proportionalis.

Sit ellipsis KN. dato circulo YZ. analoga sed inter diuersas parallelas constituta. sitque secunda diameter ellipsis VM. eiusque altitudo perpendicularis AC. & altitudo seu diameter circuli dati YZ. fiatque vt AC. ad YZ. ita YZ. ad aliam rectam quampiam E. Dico esse vt VM. ad E. ita ellipsin KN. ad circulum YZ. sit eodem motu æquidistanter proportionali quo ellipsis KN. descripta est, descriptus etiam circulus AC. erit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipsis KN. ad circulum AC. & vt quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita circulus AC. ad circulum YZ. vt autem quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita diameter AC. ad tertiam proportionalem E. Quare cum sit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipsis KN. ad circulum AC. & vt AC. ad E. ita circulus AC. ad circulum YZ. erit ex æquali vt diameter VM. ad rectam E. ita ellipsis KN. ad circulum YZ. Quod erat demonstrandum.





2.3.4. huius.

Corol. 20. huius.

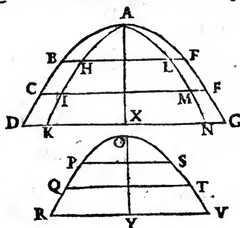
2. 12.

Corol. 20. 6.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

Circuli atque ellipses inæquales, item Parabolæ, atque Hyperbolæ analogæ inter diuersas parallelas descriptæ habent rationem compositam ex ratione altitudinum, & ratione parallelarum proportionalium.

Sint circulus atque ellipsis ADG. ORV. vel duæ Parabolæ ADC. ORV. vel duæ Hyperbolæ ADG. ORV. inæquales, ADG. maior, minor ORV. sed analogæ, & ductæ sint in figura ADG. parallelæ BE. CF. DG. proportionales parallelis PS. QT. RV. & sint altitudines AX. OY. quæ & diametri secantes parallelas proportionales. Dico rationem figuræ OKV. ad figuram ADG. esse compositam ex ratione OY. ad AX. & ratione RV. ad DG. Sumantur circa AX. rectæ HL. IM. KN. æquales ipsi PS. QT. RV. Erit



AKN. figura analoga ipsi OKV. vt ex demonstratis superioribus propositionibus constat; quare vt AX. altitudo ad altitudinem OY. ita figura ADG. ad figuram ORV. vt constat ex 21. huius, & vt KN. id est RV. ad DG. ita figura AKN. ad figuram ADG. vt probatum est 20. huius. Ergo cum sit vt figura ORV. ad figuram AKN. ita OY. ad

AX.

AX. & vt figura AKN. ad figuram ADG. ita DG. ad KN. erit ratio ORV. ad ADG. composita ex rationibus OY. ad AX. & KN. id est RV. ad DG. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

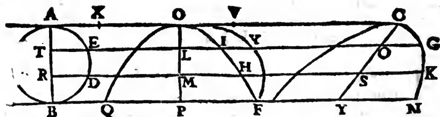
HActenus egimus de figuris quæ motu ita fiunt, vt earum diametri in easdem rationes diuidantur, ipsæque diametri chordas parallelas etiam proportionaliter diuidant. Nunc transeundum ad illas quas definitione sexta huius descripsimus, in quibus chorda vnius figuræ circa alterum extremum diametri circumuoluta & in peripheriam figuræ terminatæ; chordis alterius figuræ motu parallelo delatis ac per prioris peripheriæ puncta transeuntibus sunt proportionales.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI motu ad chordas circuli coniunctas æquidistanter proportionali Conicoides primum describatur illud est Parabola.

Sit Conicoides primum QOF. inter duas parallelas AO. BF. descriptum cuius vertex O. diameter OP. ordinatim applicatæ LI. MH. ipsi BF. parallelæ. Dico Conicoides QOF. esse Parabolam. Sit primum OP. diameter ad extremas parallelas perpendicularis, & intra duas parallelas AO. BF. descriptus sit circa diametrum AB. ad extremas AO. BF. orthogoniam circulus ADB. & productæ IL. HM. secent peripheriam circuli in E. D. & diametrum in T. R. & connectantur AE. AD. item BE. BD. erunt ex definitione 6. huius, rectæ LI. MH. rectis AE. AD. proportionales; sint autem primum æquales: erit vt quadratum MH. ad quadratum LI. ita quadratum AD. ad quadratum AE. sed quadrato AD. æquale est rectangulum definit. 6. huius.

BAR. & quadrato AE. rectangulum BAT. (nam in trian-
31. 3. gulis rectangulis BDA. BEA. ad D. & E. in quibus ad ba-



ses demissæ sunt perpendiculares DR. ET. ex hypothesi,
est vt BA. ad AD. ita AD. ad AR. & vt BA. ad AE. ita
8. 6. 17. 6. AE. ad AT. ideoque quadrata AD. AE. rectangulis BAR.
11. 5. BAT. æqualia sunt) igitur vt quadratum MH. ad qua-
dratum LI. ita rectangulum BAR. ad rectangulum BAT.
Lemm. sed rectangula BAR. BAT. rectangulis POM. POL. simi-
1. huius. lia sunt (Nam vt BA. ad AR. ita PO. ad OM. & vt BA.
Definit. 1. 6. ad AT. ita PO. ad OL. similia igitur sunt rectangula BAR.
POM. & PAT. POL.) estque vt BA. prima ad PO. se-
22. 6. cundam, ita BA. tertia ad PO. quartam, erit vt rectangu-
lum BAR. ad rectangulum POM. ita rectangulum BAT.
ad rectangulum POL. & permutando, vt rectangulum
BAR. ad rectangulum BAT. ita rectangulum POM. ad re-
ctangulum POL. sed rectangulum BAR. ad rectangulum
BAT. paulo ante ostensum est esse vt quadratum MH. ad
11. 5. quadratum LI. igitur erit vt rectangulum POM. ad re-
ctangulum POL. ita quadratum MH. ad quadratum LI.
1. 6. sed vt rectangulum POM. ad rectangulum POL. ita (po-
sita communi altitudine PO.) MO. ad LO. igitur quadra-
tum MH. ad quadratum LI. est vt MO. ad LO. Iam vero
fiat vt PO. diameter Conicoidis primi ad BA. diametrum
circuli, ita diameter circuli ad tertiam OV. quæ ipsi PO.
in vertice O. aptetur ad angulos rectos, & sit AX. æqualis
17. 6. ipsi AB. quoniam est vt PO. ad AB. ita AB. ad OV. erit re-
ctangulum POV. quadrato BA. æquale. Rursus quoniam
pre-

proportionaliter diuisæ sunt BA. PO. in punctis T. L. erunt rectangula XAT. id est BAT. & VOL. æqualia, rectangulo autem BAT. æquale est quadratum AE. vt supra ostensum est, & quadrato AE. quadratum LI. cum æquales sint, ex descriprione, AE. LI. Igitur rectangulum VOL. quadrato LI. æquale est. Lemm. 2. huius. definit. 6. huius.

Iuam vero constat ex 52. 1. Conic. posse inueniri Parabolam cuius diameter sit data OP. vertex punctum O. terminus ipsius OP. Ducta vero quælibet vt QP. a sectione ad diametrum in angulo recto QPO. possit rectangulum POV. sub diametro PO. & recta illi perpendiculari OV. quæ erit latus rectum ex 11. 1. Conicorum. Inuenta iam sit, & imponatur Parabola Conicoidi primo: congruent PO. Conicoidi & PO. Parabolæ cum æquales positæ sint: item QP. vtriusque figuræ, cum tam rectæ QP. quam anguli QPO. ponantur æquales: denique eandem ob causam conuenient OV. in vtraque figura. Igitur aut congruet toti Conicoidi Parabola; aut minime. Ponatur primum non congruere, & vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ secet Conicoidis lineam curuam in puncto I. Parabolæ vero in Y. Quoniam in vtraque figura OV. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, &, vt paulo ante ostensum est, rectangulum LOV. æquale est quadrato LI. & rectangulum LOV. æquale est quadrato LY. æqualia sunt quadrata LI. LY. pars & totum: Quod est absurdum: Congruent igitur Conicoides primum & Parabola: ergo æqualia sunt, & in vnam figuram coincidunt. 52.1.Conic 11.1.Conic. 11.1.Conic. 9. 5.

Sed Conicoides primum, sit non QOF. sed CNY. & angulus CYN. quicumq; & rectæ GO. KS. NY. cum rectis LI. MH. PF. continuatæ ipsis AE. AD. AB. id est LI. MH. PF. proportionales. Dico etiam CNY. esse Parabolam. Cum enim parallelæ sint OC. QY. & proportionales OL. LM. MP. ipsis CO. OS. SY. item proportionales LI. MH. PF. ipsi GO. KS. NY. erit figura CNY. ad Parabolam QOF. analoga, ac motu æquidistanter ad Parabolam pro- Lem. 1. huius. defin. 5. huius. defin. 1. huius.

por-

16.huius. portionali procreata, igitur & ipsa est Parabola. Quare Conicoides primum est Parabola. Quod demonstrare oportuit.

Vocetur autem Parabola.

COROLLARIVM. I.

EX dictis manifestum est si diameter Parabolæ PO. sit perpendicularis ad rectas AO. BF. & rectæ LI. MH. PF. chordis AE. AD. AB. æquales, rectangulum POL. esse æquale quadrato LI. & rectangulum POM. quadrato MH. Cum enim æquales sint PO. BA. & OL. AT. erunt rectangula POL. BAT. æqualia, at rectangulum BAT. quadrato AE. & quadratum AE. quadrato LI. æquale est: æqualia igitur sunt rectangulum POL. & quadratum LI. atque eandem ob causam æqualia sunt rectangulum POM. & quadratum MH. 34. 1.

COROLLARIVM. II.

APerte etiam deducitur, immo cum propositione conuenit quod sequitur: si in sinus arcuum circuli productos, ex punctis in quibus diametrum secant chordæ eorumdem arcuum, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema transiens linea curua Parabola est. Vt in figura prima definitionis 6. huius; si semicirculus ACB. secetur in quotlibet arcus AD. AE. AC. AB. quos subtendunt chordæ AE. AD. AC. AB. & sinus EL. DM. CN. & tangens FB. in quibus productis accipiantur LI. MH. NG. BF. ipsis AE. AD. AC. AB. proportionales, curua linea AIHGF. per extrema illarum linearum transiens est Parabola: hoc enim ipsum sub alio titulo in propositione demonstratum est.

COROLLARIVM. III.

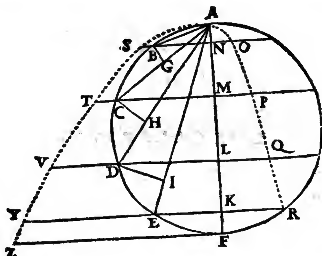
COnstat etiam ex vltima parte propositionis, omnes Parabolas quæ motu ad chordas circuli coniunctas produ-

ducuntur esse analogas; atque ideo quæ supra de Parabolis analogis dicta sunt illis conuenire.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI a circuli vertice ductæ chordæ æqualium arcuum peripheriam secent in punctis a quibus in sequentes ac maiores chordas perpendiculares ducantur, quæ in sinus eorundem arcuum a punctis in quibus diametrum secant hinc inde transferantur: Curua linea per earum extrema transiens est Parabola.

Sit circulus ACF. cuius diameter AF. vertex A. diuidatur semicirculus ACF. in quotcumque partes æquales



AB. BC. CD. DE. EF. quæ connectantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. & ducantur sinus BN. CM. DL. EK. (quos etiam vltra puncta NMLK. produximus) ab extremis pun-

punctis B. C. D. E. chordarum, in quibus peripheriam secant, ducantur in sequentes chordas perpendiculares BG. CH. DI. EK. quæ transferantur in sinus a punctis N. M. L. K. ita vt NO. MP. LQ. KE. ipsis BG. CH. DI. EK. sint æquales. Dico lineam curuam AOPQE. esse Parabolam. Sumantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. æquales in sinubus productis NS. MT. LV. KY. manifestum est quod per puncta A. S. T. V. Y. Z. transibit Parabola. Hinc cum æquales positi sint arcus BC. CD. DE. EF. æquales, erunt anguli BAC. CAD. DAE. EAF. æquales ideoque in triangulis rectangulis GBA. HCA. IDA. KEA. reliqui anguli ad B. C. D. E. æquales ac omnia illa triangula similia: vt igitur AB. ad BG. ita AC. ad CH. & permutando vt AB. ad AC. id est NS. ad MT. ita BG. ad CH. id est NO. ad MP. Eodem modo, cum æquiangula sint triangula ACH. ADI. erit vt AC. ad CH. ita AD. ad DI. & permutando vt AC. ad AD. id est MT. ad LV. ita MP. ad QL. atque eadem ratione probabimus esse vt LV. ad KY. ita LQ. ad ad KE. vel KR. cum igitur Parabola sit data ASTVYZ. sitque vt NS. ad MT. ita NO. ad MP. & vt MT. ad LV. ita MP. ad LQ. & vt LV. ad KY. ita LQ. ad KE. erit figura AOPQE. datæ parabole ASTVYZ. analoga, ideoque Parabola. Quod erat demonstrandum.

Coroll. 1. 25. huius. — 27. 3. — 32. 1. — 4. 6. — 16. huius.

COROLLARIVM.

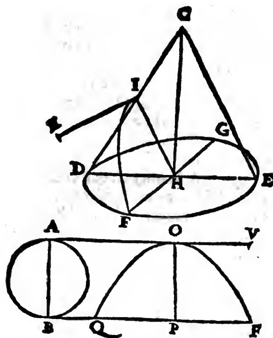
Ex demonstratis sequitur si rectæ AG. AH. AI. AK. in sinus NB. MC. LD. KE. ordine transferantur, lineam curuam per illarum extrema transeuntem esse Parabolam. Nam in iisdem triangulis similibus ABG. CAH. DAI. EAK. est vt AB. ad AC. ita AG. ad AH. & vt AC. ad AD. ita AH. ad AI. & sic deinceps; quare sequitur id quod propositum est, eodem modo quo in propositione in rectis BG. CH. DI. EK. in sinus translatis.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

PArabola recta ac circulo æquichordis, est ſectio coni æquilateri cuius baſis est circulus habens diametrum diametro circuli congenei duplam, diuidens illum circulum per centrum.

Sint inter parallelas AO. BF. circulus cuius diameter AB. & illi congenea Parabola QOF. cuius diameter PO. ad vtramque parallelarum ſit recta. Hinc centro H.



ſemidiametro HG. quæ ipſi AB. ſit æqualis, deſcribatur circulus DFEG. qui ſit baſis coni æquicruris cuius

V u vertex

vertex A. secceturque plano per axem quod sectionem faciat triangulum æquicrure CDE. Ductaque per centrum diametro FHG. ad DE. perpendiculari, & diuisa DC. bifariam I. seccetur altero plano transeunte per rectam FG. & rectam IH. quæ cum sit parallela ipsi CE.
15. definit. (nam diuisa DE. bifariam in H. & DC. bifariam in I.
2. 6. ex hypothesi, erit vt DH. ad HE. ita DI. ad IC. ideoque parallelæ IH. CE.) constat sectionem FIG. quæ fit illo
11.1.Conic. plano, esse Parabolam. Dico Parabolam FIG. Parabolæ QOF. congruere, ideoque vnam & eandem esse figuram.
15. defin. Nam cum sumpta sit HG. æqualis AB. erit GF. quæ dupla est ipsius GH; etiam dupla ipsius AB. sed ipsius AB. dupla est QF. ex descriptione: igitur æquales sunt bases FG. QF. duarum Parabolarum. Rursus quia parallela est IH.
Cor. 4 6. ipsi CE. erunt triangula CED. IHD. similia: quare vt CE. ad ED. ita IH. ad HD. æquales autem sunt CE. ED. igitur æquales IH. HD. sed ipsi HD. est æqualis AB. ex hy-
34. 1. pothesi, & ipsi AB. recta QP. in parallelogrammo ABPO. æquales igitur sunt diametri IH. OP. Parabolarum FIG. QOF. sed & anguli FHI. QPO. recti sunt, hic ex hypothesi, ille quia cum conus sit æquicruris erunt rectæ a vertice C. ad puncta D. F. E. G. æquales, in triangulis igitur CFH. CGH. habentibus duo latera FH. HC. duobus
8. 1. GH. HC. æqualia, & basim FC. basi GC. æqualem, erunt
10. definit. & anguli FHC. GHC. æquales, ideoque recti; atque eo-
3. defin. 11. & 4. prop. 11. dem modo ostendentur recti DHC. EHC. recta igitur est CH. ad planum DFEG. Quare etiam rectum est planum
18. 11. CDE. plano GDFE. Igitur & planum GDFE. ipsi plano CDF. rectum est; cum igitur recta FH. faciat angulos re-
4. 11. ctos cum DE. CA. in puncto H. insistet plano DCE. ad
3 defin. 11. angulos rectos: quare sequitur angulum FHI. esse rectum. Denique si fiat vt quadratum DE. ad rectangulum DCE.
11.1.Conic. ita linea KI. ad IC. erit KI. latus rectum, æquale ipsi IC. (nam in triangulo æquicrure DCE. quadratum DE. rectangulo DCE. æquale est) id est ipsi ID. id est ipsi DH.

id

id est ipsi AB. ipsi autem AB. est etiam æquale latus rectum PV. Parabolæ QOF. (nam si fiat vt PO. ad BA. ita BA. ad aliam OV. erit tertia illa OV. latus rectum Parabolæ QOF. sed æquales sunt BA. PO. Igitur æquales sunt OV. PO. id est BA.) æqualia igitur sunt latera recta OV. KI. Ex quibus per impositionem facile colligitur identitas Parabolarum FIG. QOF. Nam recta PO. rectæ æquali HI. congruet, item angulus ad H. angulo ad P. & recta QF. rectæ æquali FG. & angulus rectus POV. recto HIK. & OV. æquali IK. Quare & curua QOF. curuæ FIG. congruet. Si enim non dicantur congruere fiet abductio ad absurdum eodem prorsus modo quo 16. huius. Congruent igitur: ergo eadem erit figura QOF. ipsi FIG. Quod erat demonstrandum. 15. huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI motu ad chordas Parabolæ æquidistanter proportionali Conicoides secundum describatur: illud erit Hyperbola.

Sint duæ parallelæ AO. BP. inter quas descripta sit Parabola CAD. & motu ad ipsius chordas æquidistanter pro portionali, iuxta modum traditum definitione 6. huius descriptum sit Conicoides secundum QOG. Dico illud esse Hyperbolam. Parabolæ diameter sit AB. Conicoidis PO. vtraque primo perpendicularis ad AO. & BP. Producta autem PO. in R. accipiatur illi æqualis OR. & ipsi OR. sit perpendicularis & æqualis OX: & applicatæ ordinatim LI. MH. producantur, dum Parabolæ diametrum secent in L. V. & ipsius lineam curuam in E. F. & ducantur chordæ AE. AF. AD. quæ primo ponantur æquales ipsis LI. MH. PG. Quoniam RO. ponitur æqualis ipsi OP. & OP. æqualis est ipsi AB. erit RO. æqualis ipsi AB. sed & æquales sunt OL. AN. rectangula igitur ROL. BAN. æqualia sunt: sed 34. 1.

Vu 2 rectan-

Coroll. 1. 15. huius. rectangulo BAN. æquale est quadratum NE. Igitur rectangulum ROL. æquale est quadrato NE. At quadratum

47. .1 AE. est æquale quadratis AN. NE. & quadrato AE. est æquale LI. cum AE. LI. positæ sint æquales, ergo quadratum LI. est æquale rectangulo ROL. & quadrato AN. id est OL. sed rectangulo ROL. & quadrato OL. æquale est rectangulum RLO. igitur quadratum LI. est æquale rectangulo RLO. Eodemque modo ostendemus quadratum MH. esse æquale rectangulo RMO. vt igitur rectangulum RLO. ad rectangulum RMO. ita quadratum LI. ad quadratum MH. Cumque æqualia sint rectangulum RLO. & quadratum LI. & æquales etiam positæ RO. OX. patet esse vt rectangulum RLO. ad quadratum LI. ita RO. ad OX. Quæ proprietates etiam in Hyperbola demonstratæ sunt lib. 1. Conic. prop. 21. Vocetur autem RO. transuersum figuræ latus & OX. rectum. Hinc eodem prorsus modo quo vltima parte 17. huius, demonstrabimus Conicoides secundum esse Hyperbolam. Constat enim ex

53. 1. Conic. posse inueniri Hyperbolam cuius latus rectum OX. transuersum OR. & diameter OP. Ducta vero qualibet PG. a sectione ad diametrum in angulo GPO. sit vt RO. ad OX. ita rectangulum RPO. ad quadratum PG. congruent rectæ OP. Hyperbolæ inuentæ & OP. Conicoidis secundi, cum sint æquales, item rectæ PG. Hyperbolæ & PG. Conicoidis, eo quod sint æquales, & anguli ad P. æquales, & ob eandem rationem congruent OX. Hyperbolæ & Conicoidis, & RO. vtriusque figuræ. Ergo vel figuræ totæ congruent, vel minime. Ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ secet Conicoides in I. Hyperbolam in Y. Quoniam in vtraque figura OX. est recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, & RO. latus transuersum; erit ex paulo ante demonstratis, vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. ad quadratum LI. & vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. 21. 1. Conicorum. ad quadratum LY. æqualia igitur sunt quadrata LI. LY. 9. 5. pars & totum: quod est absurdum. Congruent igitur Hyperbola ac Conicoides secundum: ergo in vnam figuram conincident, quare Conicoides secundum rectum & circulo æquichorde, est Hyperbola.

Sed Conicoides secundum sit non QOG. sed TZK. & angulus TKZ. quicumque, ac rectæ S4. D7. KZ. cum rectis LI. MH. PG. continuatæ, ipsis AE. AF. AD. id est LI. MH. PG. proportionales. Dico etiam TZK. esse Hyperbolam. Cum enim parallelæ sint OT. PK. & proportionales OL. LM. MP. ipsis TS. SD. DK. item proportionales LI. MH. PG. ipsis S4. DT. KZ. erit figura TZK. ad Hyperbolam QOG. analoga, ac motu æquidistanter ad Hyperbolam proportionali procreata: igitur & ipsa Hyperbola. Quare Conicoides secundum est Hyperbola. Quod demonstrare oportuit: *Vocetur Hyperbola conchordium prima.*

Marginal notes: 1 emm. 1. huius. — defin. 5. huius. — defin. 1. huius. — 17. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Constat ex vltima parte huius propositionis, omnes Hyperbolas quæ motu ad chordas parabolæ coniunctas æquidistanter proportionali producuntur esse analogas; ideoque omnes affectiones Hyperbolarum analogarum illis conuenire.

COROLLARIVM II.

Manifestum item est si diameter Hyperbolæ PO. sit perpendicularis ad extremas parallelas, & rectæ LI. MH. PG. ipsis AE. AF. AD. æquales, rectangula RLO. RMO. RPO. quadratis LI. MH. PG. singula singulis esse æqualia. Hoc enim in propositione probatum est.

COROLLARIVM III.

Denique, quod etiam de Parabola in 25. huius annotatum est, si in ordinatim applicatas Parabolæ productas ex punctis in quibus diametrum secant chordæ Parabolæ, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema transeuntem curuam esse Hyperbolam.

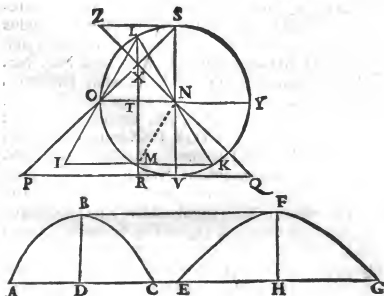
THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

Hyperbole prima, rectangula, ac Parabolæ æquichordis est sectio coni æquicruris rectanguli, cuius latus est æquale compositæ ex sinu recto & secante anguli semirecti in circulo, in quo diameter est latus coni æquilateri cuius sectione fit Parabola, ac semidiameter diametro ipsius Hyperbolæ æqualis, ita vt

dicta

dicta sectio transeat per lineam æquidistantem rectæ ductæ a vertice ad centrum basis, & abscindentem ex latere coni ad verticem tertiam ipsius lateris partem.

Sit inter duas parallelas BF. AG. parabola congenea ABC. cuius diameter ad parallelas recta BD. Item congenearum prima Hyperbola EFG. cuius diameter FH. ad parallelas itidem recta, & in qualibet linea recta sumatur IK. dupla ipsius BD. aut FH. super qua erigatur triangu-



lum æquilaterum, circa quod vertice L. basi IK. axe LM. perpendiculari ad basim intelligatur descriptus conus æquilaterus, in quo sectio transiens per verticem & diametrum basis sit idem triangulum æquilaterum LIK. cuius latus LK. diuidatur bifariam in N. & connectatur NM. (punctum autem M. diuidit basim IK. bifariam) manifestum Schol.in 26. 1.

16. huius. stum est sectionem transeuntem per NM. efficere in superficie coni parabola ABC. Ducatur ipsi IK. parallela NO. secans axem seu perpendicularem LM. in T. & latus LI. in O. ac centro N. describatur circulus OMKL. qui quidem transibit per M. K. L. Cum enim diuisa sit bifariam LK. in N. erunt LN. NK. æquales, & cum NO. parallela sit ipsi
2. & 4. 6. IK. erit vt LK. ad KI. ita LN. ad LO. æquales autem sunt LK. KI. æquales igitur LN. NO. sed & NK. NM. æquales sunt, medietates nempe æqualium laterum LK. KI. Hinc ducatur per centrum SNV. ipsi ON. perpendicularis, &
16. 6. per V. ad SV. perpendicularis PVQ. tangens circulum in V. infinita, cui occurrat SO. in P. secans LR. in X. & recta XNQ. in Q. Quoniam parallelæ sunt ON. IK. estque re-
28. 1. ctus angulus ad M. ex hypothesi etiam rectus erit angulus
Schol. in 26. 1. ad T. Ideoque diuiditur bifariam ON. in T. Adhæc cum
5. & 32. 1. angulus ONS. sit rectus ex hypothesi, & latera NO. NS. æqualia erunt anguli NOS. NSO. semirecti. Item cum triangula OTX. NTX. habeant circa angulos rectos ad T. latera OT. TX. lateribus NT. TX. æqualia, erunt bases OX. NX. æquales & anguli TOX. TNX. æquales ac semirecti, ideoq; OXT. NXT. semirecti, angulus igitur OXN. rectus est. Sed & cum eidem ON. perpendiculares sint
29. 1. LT. SN. parallelæ sunt LR. SV. quare cum angulus ad V. rectus sit, rectus est etiam angulus XRP. XRQ. sed anguli ad X. ostensi sunt semirecti, igitur sunt & semirecti anguli
6. 1. ad PQ. Isosceles ergo est triangulum XPQ. cuius latus XQ. componitur ex recta XN. quæ est sinus anguli semirecti XON. & ex recta NQ. quæ est secans anguli semirecti
15. 1. VNQ. (nam cum semirectus sit XNS. etiam angulus ad verticem VNQ. est semirectus, cuius tangens VQ. secans NQ. ac ipsa XN. est tertia pars totius XQ. producta enim NX. dum tangenti semirecti SZ. occurrat in Z. erit NZ. secans semirecti, ac tam angulus SNZ. quam SZN. in trian-
5. 1. gulo NSZ. semirecti, ideoque æquales NS. SZ. sed & recti
8. 6. sunt anguli NSZ. NXS. vt igitur NS. æqualis ad æqualem SZ.

SZ. ita NX. æqualis ad æqualem XZ. quare NX. eſt medietas ſecantis ſemirecti NZ. id eſt NQ. ac proinde tertia pars totius XQ.) Iam vero circa verticem X. axem XR. circulumque cuius diameter PQ. vertatur triangulum XPQ. efformabitur Conus PXQ. æquicruris rectangulus, cuius latus XQ. compoſitum ex ſinu recto XN. & ſecante NQ. anguli ſemirecti in circulo SOV. ac diameter circuli eſt LK. latus coni æquilateri LIK. cuius ſectione NM. fit Parabola congenea. Sit autem idem triangulum XPQ. triangulum per axem, ac per diametrum baſis, & ſecetur conus ſecundum rectam NV. quæ producta productæ PX. occurrat in S. Manifeſtum eſt ſectionem transeuntem per V. eſſe Hyperbolam, nam ſectionis diameter VN. producta cum latere trianguli PX. conuenit in S. extra verticem, quæ ſemidiametro circuli SOV. eſt æqualis, & abſcindit ex latere XQ. verſus verticem rectam XN. quæ eſt tertia pars lateris XQ. Dico Hyperbolam cuius diameter NV. eſſe eandem Hyperbolæ FG. Fiat enim vt quadratum LR. ad rectangulum QRP. ita SN. ad aliam lineam NY. erit NY. latus rectum SN. tranſuerſum, ſed quadratum LR. rectangulo QRP. eſt æquale (oſtenſæ enim ſunt æquales QR. RL. & RL. RP.) igitur latus tranſuerſum SN. eſt æquale recto NY. & vtrumque diametro NV. ſed diameter NV. eſt æqualis diametro Parabolæ NM. id eſt ipſi BD. ex hypotheſi, & BD. diametro Hyperbolæ FH. Igitur Hyperbolæ EFG. & NV. habent æqualem diametrum, ſed in Hyperbola EFG. latus rectum, item tranſuerſum ſunt æqualia diametro FH. ergo latus tranſuerſum, & rectum Hyperbolæ EFG. ſunt æqualia lateri recto & tranſuerſo Hyperbolæ quæ tranſit per NV. ſed & rectangula ponitur vtraque Hyperbola; Cum ergo Hyperbolæ EFG. & quæ per NV. habeant æqualem diametrum, æquale latus rectum, æquale tranſuerſum, æqualeſque angulos efficiant ordinatim applicatæ ad diametrum nimirum rectos; Conſtat euidenter ex 53. 1. Co-

1. definit. 1. Conic.

3. 1. Conic.

12. 1. Conic.

15. definit.

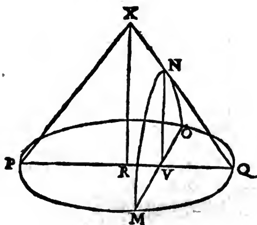
19. huius.

Xx nico-

nicorum,& ex impositione;illas Hyperbolas sibi congruere ideoque vnam,& eandem esse Hyperbolam. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc aperte colligitur si conus Isosceles rectangulus quilibet plano per tertiam lateris partem versus verticem, axi parallelo secetur, sectionem esse Hyperbolam, congenearum primæ similem. Vt si conus Isosceles PXQ.



rectangulus ad X. sumpta XN. tertia lateris parte secetur plano per NV. parallelo axi XR. sectio MNO. erit Hyperbola similis Hyperbolæ EFG. Nam cum omnia in vtraque similia demonstrentur, ex dictis erunt & ipsæ inter se similes.

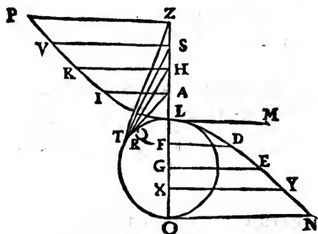
THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI recta linea extra circulum ita moueatur, vt altero extremo diametrum productam

secet,

secet, altero tangat: & per puncta vbi ea diametrum secat, recta ad diametrum perpendicularis continuo moueatur tangenti æqualis: linea extremitate dictæ perpendicularis descripta erit Hyperbola conchordium prima.

Sit circulus ACO. cuius diameter LO. perpendicularis ad parallelas tangentes LM. ON. quæ producatur extra peripheriam, & moueatur tangens quælibet a puncto L. versus A. H. S. ita vt diametrum productam secet in A.



circulum tangat in Q. hinc diametrum secet in H. S. circulum tangat in R. T. &c. & per puncta A. H. S. moueatur continuo perpendicularis ad diametrum tangentibus æqualis, nempe AI. sit æqualis AQ. & HK. ipsi HR. & SV. ipsi ST. & ZB. ipsi ZP. Dico lineam curuam LIKV. esse hyperbolam congenearum primam. Sit descripta circa LO. Hyperbola prima cuius diameter LO. eadem quæ circuli in qua sumantur rectæ LF. LG. LX. LO. ipsi LA. LH. LS. LZ. æquales, & applicentur ordinatim FD. GE. XY. erit rectangulum ZFL. æquale quadrato FD. &

ZGL. æquale quadrato SE. & ZXL. æquale quadrato XY. atque ita deinceps : Rectangulo autem ZFL. æquale, est rectangulum OAL. (æquales enim ponuntur OL. ZL. item LF. LA. quare æquales OA. ZF.) & rectangulo ZGL. rectangulum OHL. & rectangulo ZXL. rectangulum OSL. &c. sed & rectangulo ZFL. æquale est quadratum FD. & rectangulo ZGL. quadratum GE. & rectangulo ZXS. quadratum XY. &c. Item rectangulo OAL. est æquale quadratum AQ. rectangulo OHL. quadratum HR. & rectangulo OSL. quadratum AT ipsis autem quadratis AQ. AR. AT. æqualia sunt quadrata AI. HK. SV. (nam lineæ AI. HK. SV. ipsis AQ. AR. AT. positæ sunt æquales) Igitur a primo ad vltimum, quadrata FD. GE. XY. quadratis AI. HK. SV. &c. sunt æqualia, ac proinde æquales FD. GE. XY. ipsis AI. HK. SV. sed & æquales diametri OL. LZ. & æquales LF. FG. GX. ipsis LA. AH. HS. & recti anguli ad O. & Z. Igitur ex 53. 1. Conicorum ex dictis superioribus propositionibus, & 9. ac 18. huius, patet si sibi imponantur duæ curuæ LDN. LKV. congruent inter se, ideoque cum ADN. sit congenearum prima erit & LKV. conchordium prima. Quod erat demonstrandum.

19. huius

36. 3.

3. pronunc.

53. 1. Conicorum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

Conicoides tertium rectangulum, & primæ Hyperbolæ æquichorde est Hyperbola, cuius latus rectum est æquale lateri recto primæ Hyperbolæ; transuersum recti dimidium.

Inter duas parallelas AX. VM. descriptus sit circulus ASV. circa diametrum AV. perpendicularem ad parallelas, & circa eandem diametrum Conicoides primum AFH. Conicoides secundum AKM. Conicoides tertium AYZ. Diuisaque AV. verbi gratia, in quotlibet & quas-

libet

libet partes in punctis B. C. D. ducantur ordinatim applicatæ BY.CZ.DO.&c.secantes Conicoidea ordine in punctis B. R. E. I. Y. item C. S. F. K. Z. & in punctis D. T. S. L. O. &c. & a puncto A. ducantur ad puncta sectionum chordæ AR. AE. AI. AY. atque ita a vertice A. ad reliqua puncta intelligantur chordæ, quibus æquales erunt in ordinatim applicatis rectæ BE. BI. BY. nempe recta BE. chordæ AR. recta BI. chordæ AE. & recta BY. chordæ AI. atque ita in reliquis, recta CF. chordæ AS. recta CK. chordæ AF. & recta CZ. chordæ AK. &c. vt constat ex definitionibus huius, ac descriptione dictarum figurarum. Hinc in VA. producta, & in perpendiculari AX. sumantur AN. AQ. ipsi VA. æquales, ipsiusque AN. dimidia pars A2. Dico Conicoides tertium esse Hyperbolā, cuius latus rectum AQ. transuersum A2.

7
6
N
2
3
Q X
A
B R E I Y a
C S F K Z b
D T G L O d
V H M P f

Quo-

Quoniam æquales sunt VA. AB. rectis NA. AB. erit rectangulum VAB. æquale rectangulo NAB. sed rectangulo VAB. est æquale quadratum AR. id est BE. ex hypothesi. Igitur rectangulo NAB. est æquale quadratum BE. quadratum autem BE. cum quadrato BA. est æquale quadrato AE. id est BI. igitur rectangulum NAB cum quadrato AB. id est rectangulum NBA. est æquale quadrato BI. sumatur N6. æqualis ipsi AB. quoniam quadratum BI. cum quadrato AB. est æquale quadrato AI. id est BY. ex descriptione, erit rectangulum NBA. cum quadrato AB. id est N6. nempe rectangulum 6BA. æquale quadrato BY. cum igitur diuisa sit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ sint æquales AB. N6. ideoque sit vt 2A. ad AB. ita 2N. ad N6. erit vt rectangulum 6BA. id est quadratum BY. ad rectangulum 2BA. ita NA. id est QA. latus rectum ad A2. transuersum. Eodem modo quoniam æquales sunt VA. AC. rectis NA. AC. erit rectangulum VAC. æquale rectangulo NAC. sed rectangulo VAC. est æquale quadratum AS. id est CF. ex hypothesi: igitur rectangulo NAC. est æquale quadratum CF. quadratum autem CF. cum quadrato AC. est æquale quadrato AF. id est CK. igitur rectangulum NAC. cum quadrato AC. id est rectangulum NCA. est æquale quadrato CK. sumatur N7. æqualis ipsi AC. quoniam quadratum CK. cum quadrato AC. est æquale quadrato AK. id est CZ. ex descriptione erit rectangulum NCA. cum quadrato CA. id est N7. nempe rectangulum 7CA. æquale quadrato CZ. Cum igitur diuisa sit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ sint æquales AC. N7. ideoque sit vt 2A. ad AC. ita 2N. ad N7. erit vt rectangulum 7CA. id est quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. ita NA. id est QA. ad A2. Eadem demonstrandi via probabimus esse vt QA. ad A2. ita quadratum DO. ad rectangulum 2DA. Igitur cum sit vt QA. ad A2. ita quadratum BY. ad rectangulum 2BA. & vt QA. ad A2. ita quadratum CZ. ad rectangulum

Coroll. 1. 13. huius.

47. 1.

47.

Lemm. 3. huius.

Coroll. 1. 13. huius.

47. 1

Lem. 3. huius.

lum

lum 2CA. erit vt quadratum BY. ad rectangulum 2BA. ita quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. & permutando, vt quadratum BY. ad quadratum CZ. ita rectangulum 2BA. ad rectangulum 2CA. eodemque modo ostendemus esse vt quadratum DO. ad quadratum CZ. aut BY. ita rectangulum 2DA. ad rectangulum 2CA. aut 2BA. Quare cum hæ sint proprietates Hyperbolæ ex 21. primi Conicorum, manifestum est ex dictis in propositionibus 17. & 28. huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. transuersum AZ. diameter AV. congruere cum Conicoide AZP. ideoque Conicoides tertium esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum AZ. Quod fuit demonstrandum. 11. 5.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

Conicoides quartum rectangulum, & secundæ Hyperbolæ æquichorde est Hyperbola: cuius latus rectum est æquale lateri recto primæ Hyperbolæ, transuersum est recti tertia pars.

Sint omnia quæ superiori propositione, & sit quartum Conicoides Aabf. ordine descriptum eo modo quo in definitione, ac superiori propositione dictum est: Rectæ autem NA. accipiatur tertia pars A3. Dico Conicoides quartum AQa. esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum A3. Sumantur ipsi N6. id est AB. æqualis 67. Nam vt constat ex superiori propositione, quadrato BY. æquale est rectangulum 6BA. Quadratum autem AY. id est Ba. est æquale quadratis BY. AB. igitur quadratum Ba. est æquale rectangulo 6BA. & quadrato AB. quadrato autem 6BA. & quadrato AB. æquale est rectangulum 7BA. (cum æquales sumpti sint N6. 67. AB. erunt 7A. 27. huius.

6B.

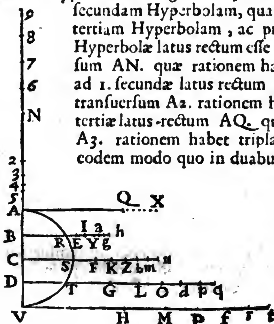
6B. æquales & rectangulum 7AB. rectangulo 6BA. æquale, ideoque rectangulum 7BA. rectangulo 6BA. cum quadrato AB. æquale) Quare cum æquales sint AB. N6. 67. erit AB. aggregati magnitudinum AB. N6. 67. tertia pars: sed etiam A3. est tertia pars ipsius AN. vt igitur AB. N6. 67. ad AB. ita AN. ad A3. & diuidendo vt N7. ad AB. ita N3. ad A3. Igitur per Lemma 3. huius, erit vt rectangulum 7BA. id est quadratum Ba. illi æquale ad
Lemm. 3. huius. rectangulum 3BA. ita NA. id est AQ. latus rectum ad transuersum A3. Eodem prorsus modo quo priori parte huius, & quo præcedenti, demonstrabimus esse vt quadratum C6. ad rectangulum 3CA. ita QA. ad A3. Hinc esse vt Quadratum Ba. ad quadratum C6. ita rectangulum 3BA. ad rectangulum 3CA. Quare cum hæ sint proprietates Hyperbolæ ex 21. 1. Conicorum; constat ex ijs quæ dicta sunt in propositionibus huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. transuersum A3. diameter AV. congruere cum Conicoide Abf. ideoque Conicoides quartum rectangulum esse Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. transuersum A3. Quod erat &c.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

Omnia Conicoidea rectangula & prioribus æquichordia primo excepto sunt Hyperbolæ, quæ si ordine accipiantur eorum latera transuersa rationem habent inter se a numeris ab vnitate serie naturali progredientibus, seu ab exponentibus denominatam.

Sit AV. diameter communis omnium conoideum congeneorum A. vertex AN. latus transuersum, cui æqualis sit perpendicularis AQ. Hinc ducta BH. infinita ordinatim

dinatim applicata, item recta per punctum E. intelligatnr transire conicoides primum, per punctum I. secundum; per Y. tertium; per, a. quartum, per g. quintum; per h. sextum, ac sic deinceps: Dico hæc omnia conicoidea, primo excepto, esse Hyperbolas, ac latus rectum ad transuersum in prima Hyperbola habere rationem quam 1. ad 1. in secunda duplam, in tertia triplam, in quarta quadruplam, & sic in infinitum. Manifestum est Conicoides primum AE. esse Parabolam, secundum AI. esse 16. huius. 21. huius.
primam Hyperbolam congeneam; tertium AY. esse 27. huius.
secundam Hyperbolam, quartum Aa. esse 28. huius.
tertiam Hyperbolam, ac primæ quidem Hyperbolæ latus rectum esse AQ. transuersum AN. quæ rationem habent quam 1. ad 1. secundæ latus rectum AQ. quod ad transuersum A2. rationem habet duplam, tertiæ latus-rectum AQ. quod ad rectum A3. rationem habet triplam: Iam vero eodem modo quo in duabus superioribus probabimus, quartum conicoides Ag. esse quartam Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. adtransuersum habet rationem quadruplam.



Reuocentur enim in memoriam duæ superiores propositiones, & sit A4. quarta pars ipsius AN. & præter partes acceptas N6. 67. æquales ipsi AB. accipiatur etiam 78. eidem AB. æqualis; eadem omnino ratione qua in duabus superioribus probabimus quadratum gB. rectangulo 8BA. esse æquale. Rursus quia A4. est ipsius AN. quarta pars & AB. ipsarum AB.

N6.67.68. quarta pars, eodem penitus modo quo in duabus superioribus demonstrabimus esse vt rectangulum 8BA. id est quadratum gB. ad rectangulum 4BA. ita NA. id est QA. ad A4. Item vt quadratum mC. ad rectangulum 4CA. ita QA. ad A4. ideoque vt Quadratum Bg. ad quadratum Cm. ita rectangulum 4BA. ad rectangulum 4CA. sicque propter eandem causam quam in duabus superioribus attulimus, conoides transiens per AGM. esse Hyperbolam quartam.

Neque aliter efficietur Conicoides sextum esse quintam Hyperbolam cuius latus rectum AQ habeat ad transuersum rationem quintuplam. Sit enim A5. quinta pars totius AN. & accipiatur adhuc 89. ipsis N6. 67. 78. & ipsi AB. æqualis; ostendemus vt supra quadratum Bh. rectangulo 9BA. esse æquale. Præterea quia A5. est ipsius AN. quinta pars, & AB. ipsarum AB. N6. 67. 78. 89. quinta pars eodem prorsus modo quo in duabus superioribus demonstrabimus esse vt rectangulum 9BA. id est quadratum Bh. ad rectangulum 5BA. ita NA. id est QA. ad A5. ac reliqua vt in prima parte huius, ideoque Ahn. esse Hyperbolam quintam, cuius latus rectum AQ. ad rectum A5. habeat proportionem quintuplam.

Atque ita demonstrabimus Conicoides septimum esse sextam Hyperbolam, cuius latus AQ. ad transuersum habeat rationem sextuplam; sicque deinceps in infinitum. Quare omnia Conoidea congenea rectangula &c.

SCHOLIVM.

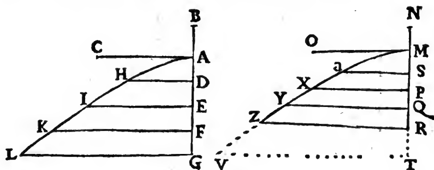
EX ponentes vocamus hic, & sequentibus propositionibus numeros quibus ordo Hyperbolarum quæ sese mutua atque ordinata generatione procreant, designatur, vt si ordine disponantur prima, secunda, tertia, quarta &c. Hyperbolæ earum exponentes dicentur numeri 1. 2. 3. 4. *atque ita deinceps.*

THEO-

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribusque æquichordes accipiantur, atque diameter prioris ad partem diametri posterioris a vertice sumptam rationem habeat quam exponens posterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola posteriori Hyperbolæ circa sumptam diametri partem analoga; habebuntq; inuicem rationem ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium compositam.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedentis sit æquichordis; atque ordine prior sit ALG. posterior quocumque interuallo MVT. sintque earum exponentes quilibet numeri (verbi



bi gratia prioris 3. posterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine sit tertia, posterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC. MO. transuersa AB. MN. quæ proportionem habent ab exponentibus denominatam, nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hy- 33. huius. 33. huius.

perbolæ ALG. ita latus transuersum AB. seu MO. ad transuersum MN. Ducantur item diametri AG. NT. & fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in proposito 4. ad 3.) ita diameter AG. ad partem diametri MR. & per R. ordinatim applicetur RZ. secans suam Hyperbolen in Z. Dico Hyperbolam ALG. Hyperbolę MZR. esse analogam, & habere rationem compositam ex ratione altitudinum AG. MR. & parallelarum GL. RZ. Diuidantur AG. MR. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. & S. P. Q. R. per quæ ducantur ordinatim applicatæ DH. EI. FK. GL. & Sa. PX. QY. RZ. Quoniam tam multiplex est GA. ipsius AD. quam
15. 5. MR. ipsius MS. erit vt GA. ad RM. ita DA. ad SM. sed vt GA. ad RM. ita AB. ad MN. igitur vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. Quare cum sit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. similia igitur sunt rectangula BDA. NSM. Rursus cum æ-
15. 5. quales sint DA. DE. & MS. SP. ex hypothesi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE. itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. sed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. similia igitur sunt rectangula BEA. NPM. Quare cum ostensum sit esse BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo & per conuersionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permu-
22. 6. tando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula similia BEA. NPM. & duo similia BDA. NSM. super 4. proportionalibus BE. NP. BD. NS. constituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulum NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA.
21. 1. Conic. ita rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. sed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum

ctangulum NSM. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. 11. 5.
vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoque vt EI. ad DH. ita PX. 22. 6.
ad Sa. atque eodem modo demonstrabimus esse vt FK. ad EI. & GL. ad FK. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuisæ sint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. ipsis Sa. PX. QY. RZ. sint proportionales; analogæ sunt Hyperbolæ ALG. MVT. 4. defin. huius.
quæ cum sint inæquales, & inter diuersas parallelas habent etiam rationem compositam ex rationibus altitudi- 24. huius.
num AG. MR. & parallelarum proportionalium GL. RZ. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribusque æquichordes sumantur, atque diameter prioris producta ad diametrum posterioris rationem habeat quam exponens posterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola circa diametrum productam posteriori Analoga: habebuntque inuicem rationem compositam ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedenti sit æquichordis; atque ordine prior sit ALG. posterior quocumque interuallo MVT. sintque earum exponentes quilibet numeri (exempli gratia prioris 3. posterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine sit tertia, posterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC. MO. transuersa AB. MN. quæ pro- 33. huius.
portionem habent (ex 33. huius) ab exponentibus denomina-

minatam, nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exp nentem Hyperbolæ ALG. ita latus rectum AC. seu M ad transuersum MN. Ducantur item diametri AG. N

& fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in proposito 4. ad 3.) ita diameter AG. producta in d. ad diametrum MT. & producta Hyperbola ad diametrum Ad. ordinatim applicetur de. secans Hyperbolam productam in e. Dico Hyperbolam AED. Hyperbolæ MVT. esse analogam; & habere dictas Hyperbolas rationem compositam ex rationibus altitudinum AD. MT. & parallelarum proportionalium DE. TV. Diuidantur AD. MT. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. d. & S. P. Q. R. T. per quæ ordinatim applicentur DH. EI. FK. GL. de. & Sa. PX. QY. RZ. TV. Quoniam tam multiplex est dA. ipsius AD. quam TM. ipsius MS. erit vt dA. ad TM. ita DA. ad SM. sed vt dA. ad TM. ita AB. ad MN. igitur vt AC. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. & Gd. ad RT. Quare cum sit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo, vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. similia igitur sunt rectangula BDA. NSM. Rursus cū æquales sint DA. DE. & MS. SP. ex hypothesi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE.

item-

15. 5.

1. definit. 6.

15. 5.

itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. quare cum sit vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. sed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. similia igitur sunt rectangula BEA. NPM. Quare cum ostensum sit esse BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo, & per conuersionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permutando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula similia BEA. NPM. & duo similia BDA. NSM. super quatuor proportionalibus BE. NP. BD. NS. constituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulū NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita rectangulum NPM. ad rectangulū NSM. sed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. ita quadratū PX. ad quadratum Sa. vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoq; vt EI. ad DH. ita PX. ad Sa. atq; eodem modo demonstrabimus esse vt FK. ad EI. & GL. ad FK. & de. ad GL. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. & TV. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuisæ sint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. de. ipsis Sa. PX. QY. RZ. TV. sint proportionales; Analogæ sunt Hyperbolę Aed. MVT. & ex 24. huius habent etiam rationem compositam ex rationibus altitudinum Ad. MT. & parallelarum quarumcumque proportionalium de. TV. Quod erat demonstrandum.

22. 6.

11. 5.

22. 6.

COROLLARIVM.

Ex hac & penultima propositione manifestum est, si Hyperbolarum exponentes ordine constituantur 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. primam Hyperbolam esse parti secundæ circa dimidiam diametrum analogam, eandem parti tertiæ Hyperbolæ

bolæ circa tertiam partem diametri; & parti quartæ circa quartam partem diametri, atque ita deinceps analogam; cum exponentes illas partes indicent $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. &c. Eodem modo secundam Hyperbolam esse parti tertiæ circa duas tertias diametri analogam, & eandem parti quartæ Hyperbolæ circa duas quartas, & parti quintæ circa duas quintas diametri, analogam, atque ita deinceps, quod exponentes $\frac{2}{3}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{5}$. indicant: sicque tertiam Hyperbolam esse parti quartæ circa 3. quartas diametri, & parti quintæ circa tres sextas analogam atque ita de reliquis vt apparet ex exponentibus $\frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}$. &c.

Præterea constat ex vltima propositione, primam Hyperbolam productam circa diametrum duplicatam secundæ Hyperbolæ, circa triplicatam tertiæ, circa quadruplicatam quartæ Hyperbolæ esse analogam: quod exponentes $\frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}$. indicant. Item secundam Hyperbolen circa diametrum auctam sesquialtera proportione, ita vt diameter ad additam habeat rationem sesquialteram, ad secundam Hyperbolam, & eandem circa diametrum auctam proportione 4. ad 2. id est duplicatam, ad quartam; & eandem circa diametrum auctam proportione 5. ad 2. ad quintam Hyperbolam esse analogam; vt ostendunt exponentes $\frac{3}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{5}{2}$. atque ita deinceps in infinitum.

FINIS LIBRI QVINTI.



CVRVI AC RECTI

Proportio promota.

LIBER SEXTVS.



Ria sunt maxime insignia Ζητούμενα, quæ iam inde a nascentis in Græcia Geometriæ primordijs Mathematicorum ingenia ac laborem exercuerunt, Circuli Tetragonismus: eiusdem in quotlibet partes diuisio; ac inter duas datas rectas, duarum mediarum proportionalium inuentio. Vltimo huic Pythius ipse ex tripode occasionem dedit, cum aram suam pesti auertendæ duplicare iussit, quod abductione quæstionis, seu ἀπαγωγῇ τοῦ ζητήματος ad eam quæ est de duabus medijs proportionalibus fieri posse Hippocrates Chius animaduertit: ideoque quæsitum hoc auspicatiori fato quam reliqua duo, solutionem reperit non mechanicam solum per varia Mesolabia, quæ præstantissimi Philosophi simul, & Geometræ, Plato, Heron, Philo Bizantius, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Archytas, atque Eratosthenes, excogitarunt, sed etiam Geometricam per duas Parabolas Menæchmi: quod Problema nos ex solidorum grege in nobiliorem planorum ac Geometricorum classem, initio superioris libri, non temere, sed validis rationibus moti transtulimus. Secundum vero quæsitum felicissimos natales, atque exortum habere visum est ex

primo, tertio, & quarto elementorum, cum Circulus cœpit bifariam secari a diametro; hinc trifariam trianguli isopleuri; quadrifariam quadrati: in quinque æquales portiones pentagoni; in sex hexagoni; in quindecim pentedecagoni inscriptione: item cum quilibet arcus bifariam, demonstratione plana; trifariam solida diuisus est; vt tamen idem vniuersale euaderet nulla Geometrarum industria, nullo ingenij conatu perfici potuit, sed veluti sydere quodam afflatum ita repente vigor eius exaruit, vt nullum ne minimum quidem multorum sæculorum decursu cœperit incrementum.

Primi deterior adhuc conditio: nam licet a præstantissimis Geometris iam ab antiquis temporibus omni opera excultum, fieri tamen non potuit, vt vllo Problemate seu Mechanico, seu Geometrico, plano, solido, vel lineari, vel primi eius surculi excluderentur. Nihil dum in eo statui, nihil determinari hactenus potuit, sed quæcumque de eo demonstrata sunt quibusdam hypothesibus innituntur, quæ num inter ἀπορήματα tantum, an etiam inter ἀδύνατα recensenda sint, vix quisquam audeat affirmare. Ad hoc vero Problema priscos illos excitauit, vt Proclo visum est, quadragesima quin- Proclus in 45. element. *ta elementorum, qua dato rectilineo æquale parallelogrammum constituitur in dato angulo rectilineo; aut, vt ego quidem existimo, vltima secundi, qua dato rectilineo æquale quadratum describitur. Si enim illa fieri possunt, quæstione quoque dignum est, num rectilineæ figuræ curuilineis æquales ostendi queant. Primi qui lapidem hunc mouerunt circuli aream quam Græci ἐμβαδὸν vocant, quadrati, aut rectilineæ figuræ spatio exæquare, ac certa proportione comparare conati sunt: quorum antiquissimus, vt Iosepho Scaligero placet (cui viro tantum in humanioribus fidei conciliat insignis eruditio, quantum in Geometricis detrahit crassissima ignoratio) fuit Bryso, hinc Antipho, quos excepit valentior secutor,* Papp. in 1. Physic. *non Oenopides Chius, vt perperam ex Proclo deducit Buteo in suo de circuli quadraturis tractatu, sed eiusdem nationis Hippocrates, ex mercatore & naufrago insignis Geometra, ac Philosophus. Priores duos nihil magis notos reddidit quam magni Philosophi iusta reprehensio, qua eorum pseudotetragonismos identidem incessit; Postremus acutissimo epicheremate (o lippum oculis male inunctis Scaligerum, qui hic acumen nullum se videre, & inuentum hoc rem vulgatissimam, ac cuiuis Geometriæ tyroni parabilem asserit,) μηνίσκους, seu Lunulas quadrauit, hinc cum veluti concepto semi-*

ne

ne in circuli tetragoniſmum eniteretur, abortum ψευδάριον *effudit, adeo tamen eleganti, & ad veritatis ſpeciem conformato aſpectu, vt vel parenti ſuo placuerit, cui licet notum eſſet nothum eſſe, ac mancum ſuum partum; qui enim id ignoraret elementorum ſcriptor doctiſſimus, &* ἀπαγωγῆς *ſeu abductionis inuentor acutiſſimus? pro legitimo atque perfecto venia haud omnino indigna* φιλαυτίας *obtrudere conatus eſt. Horum authorum paralogiſmos poſteris tradiderant, qui non extant, Eudemus in hiſtoria, & Ceria Ariſtotelica, teſte Eutocio Aſcalonita in Archimedem de dimenſione circuli, ex quibus forte deſumpſerunt qui extant Alexander Aphrodiſeus, ac Simplicius & ex iis Buteo in circuli quadratura, & Blancanus in Ariſtotelis locis Mathematicis, quos adeat qui volet.*

Cum igitur hæc via τοῦ ἐμβαδοῦ *nullum videretur exitum habere, aliam iniit Dinoſtratus eius Menæchmi frater qui circa conicas ſectiones primus verſatus eſt, ac Eudoxi diſcipulus fuit, paulo, vt videtur, poſt tempora Platonis, ac contemplationem a circuli area ad peripheriam tranſtulit cui æqualem lineam rectam inueſtigauit curua quadam per duplicem motum deſcripta quam* τετραγωνίζουσαν *ipſe, Scaliger Quadratariam, Commandinus Quadrantem, Clauius Quadratricem appellat, tunc forte ſubodoratus, quod poſtea Archimedes demonſtrauit, omnem circulum triangulo rectangulo æqualem eſſe, cuius quidem vna earum quæ exeunt a centro ad circumferentiam linearum vni ex iis quæ circa rectum angulum ſunt trianguli lateribus, ambitus vero baſi æqualis eſt. Sed ex hoc modulo Problema nullum quod ad rem faceret excudi potuit; Theorema hinc quidem prodiit hypotheticum, quo, ſi detur vltimum Quadratricis punctum, probatur futurum vt detur circumferentia circuli datæ rectæ æqualis: at vero punctum illud exiſtere nulla ratione poſſe recte animaduertit Pappus Alexandrinus lib. 4. Collectionum Mathem. Prop. 25. (neſcio quo authore idem Sporo tribuerit Scaliger) & nos poſtea demonſtrabimus; quare non certiori fiducia ſperandum eſt ex hac hypotheſi circulum quadrari, quam bouem ratiocinari poſſe ex hac conditionali, quod ſi bos eſſet animal rationis particeps ratiocinaretur, cum bouem eſſe animal rationale, fieri nullo modo poſſit. Excogitatæ ſunt & aliæ* τετραγωνίζουσαι *quas Hippias antiquus Geometra in vnum volumen coniecit, in quarum ordinem etiam* τὴν ἕλικα *ſeu volutam in plano allegit ingenioſiſſimus Archimedes, hoc demonſtrato,*

Iof. Scalig. Proclus l. 3. p. 3.

quod a Conone propositum fuerat; si lineam spiralem recta linea contigerit in vltimo ipsius spiralis termino, alia autem recta a puncto manente ducatur perpendicularis super lineam circumductam, restitutamque in priorem locum, ita vt cum contingente coëat: erit hæc linea circumferentiæ circuli æqualis; cuius tangentis inueniendæ maior spes affulget, quam vltimi quadratariæ puncti, cum nihil quod huic inuentioni repugnet hactenus appareat. Tandem cum abditissimæ huic recti & circularis analogiæ peruestigandæ impar Geometriæ sagacitas crederetur, placuit Archimedi in consilium adhibere Numeratricem, cuius ope deprahendit cuiuslibet circuli ambitum diametri esse triplum, & adhuc superare parte quapiam quæ quidem minor est septima diametri, maior autem decem septuagesimis primis; satis hæc quidem accommodate, vt recte annotauit Heraclides in Archimedis vita apud Eutocium in Archimedis circuli dimensionem πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας *ad humanæ vitæ vsum, excogitata sunt, illarum tamen quantitatum rationem haud exacte, expresserunt. Quare Apollonius Pergæus* ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ, *& Philo Gadareus ex antiquis ad exactiores numeros rem adduxerunt, recentiores vero eo continuo circuli* τεμαχισμοῦ *peruenerunt, vt eius perimetrum inter duo polygona 25165824O. angulorum, quorum alterum inscriptum, alterum circumscriptum intelligatur sitque illud partium 6283185307179586I. istud 6283185307179586З. quarum diameter est 2000000000000000O. positum esse demonstrarint, imo audio ad maiores numeros calculum increuisse, operoso quidem sed superuacuo vt reor, ac seruili labore; vt qui neq; ad vsum conferat, neq; acu exactam proportionem attingat: Et qui id possit numerus, vbi forte diameter & peripheria, itemque circuli ac cuiusuis polygoni area magnitudines sunt* ἄλογοι, *seu irrationales, quæ Geometrice, non Arithmetice exponi possunt? Atque hæc antiquiores Geometræ; Neque vero fæliciorem successum recentiorum, qui hoc saxum volutarunt, conatus habuerunt; imo eo peius illis hæc cessit opera, quo illi veteribus & doctrina, & ingenio longius agnoscuntur inferiores. Quid? quod ab illis temporibus neminem paulo melioris notæ Geometram, sed aut triobolarios, aut plerosque omnes matheseos penitus ignaros in hoc argumento versatos deprahendo? Quo enim alio nomine digneris Arabas illos apud Butionem Campanum, Brauardinum, Nicolaum Cusanum, Orontium, Bouillium, Durerum, Fortium, & post hos alio-*

Adrians Romanus idæis Mathem.

rum

rum ignobilem turbam: quibus piget me annumerare Io. Baptistam Portam, virum alioquin raræ, ac multiplicis doctrinæ, qui in suo de elementis curuilineis libro, dum Arcadum more ex lunulis nobilitatem aucupatur, ac Hippocratis incudem tundit, infelix faber sibi notam inussit, ac nulla re, quæ memoriam mereatur, inuenta, vt recte Io. Camillus Gloriosus in exercitationibus Mathematicis ostendit, multo grauiore, quam ille, lapsu a proposito excidit. Neque admodum bonoratiore loco reponendum censeo Philippum Landsbergium, qui cum nouæ suæ Cyclometriæ fundamentum iaciat minime Gemetricum, falsum, substructioni haud idoneum, eam tamen veritati, & Gemetriæ Principijs magis consentaneam quam omnium Gemetrarum qui precesserunt asserere non veretur, ac sibi ipsi gratulatur, totisque manibus applaudit, quod tetragonismum tot sæculis, totque a Geometris summo studio, ac labore quæsitum nunc primum summo Dei beneficio inuenerit. Adeo nobis nostri illudit amor, ac magico veluti fascino mentis oculum inficit, vt proprij partus Thersite licet deformiores, Achille tamen formosiores esse, & πρῶτον εἶδος ἄξιον τυραννίδος habere videantur. Sed horum omnium inscitiam infinito per interuallo superauit Iosephus Scaliger bipedum omnium quotquot fuerunt, sunt, & erunt (hoc eum elogio vir quidam doctissimus illustrat) ne Orontio quidem Finæo excepto ἀγεωμετρητότατος, in suis elementis Cyclometricis: quæ cum perlegerem mirum quam varij animum motus affecerint, ira, indignatio, admiratio, risus, commiseratio. Cyclom. lib. 1. p. 1. Prisc. 1. lib. 1.

Quis æquo animo ferat Philologum Dictatoriam potestatem, eamque impotentissime in doctissimos Philosophos, ac Mathematicos exercere? Quis sustineat Archimedem Lynceum Geometram, ac centimanum machinatorem tanquam aduersus ἐθελοκακίαν, ac χειρουργίαν peccantem traduci, vilissimo cistario vel aurigæ comparari, inscitiæ, & admissorum in apodixibus ἁμαρτημάτων ac ψευδογραφιῶν accusari; affectata per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον (quam etiam alibi scopulum vocat Scaliger) in Geometria Tyrannidis insimulari? Quis sine bile vel ipsius furentis Herculis audiat, Dinostratum tanquam nominis falsarium in τετραγωνίζουσῃ infamari? Platonem, Heronem Alexandrinum Mechanicum, Philonem Bizantium, Apollonium Pergæum ostentationis argui; Eratosthenis μηχάνημα ad cubi duplicationem excogitatum, & Nicomedis canonium irrideri? Cui stomachum non faciat vanissimi hominis

ἀλα-

In Polegom. Cyclometræ.

In Prolegom. meschalij.

In dedicatoria Cyclometria.

ἀλαζονίᾳ qua a se priscos omnes vinci iactat, quod omnia, παραλογιστικῶς, vt illi, sed κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον demonstrarit? Quis non vel Niobeo stupore stugeat eo stuporem hominis peruenisse, vt aßerat Helicen siue volutam ex sedecim, quadratricem duplicatam ex 8. circulorum peripherijs constare. Ambitum dodecagoni circulo inscribendi plus poße quam circuli perimetrum, Quadratum ab ambitu circuli (qui error fuit Arabis apud Buteonem) decuplum eße quadrati à diametro; Parabolam ad triangulum in eadem basi, eademque altitudine constitutum rationem habere sesquitertia minorem, & alia huiusmodi λῆρα pene infinita, quorum vt quædam Adrianus Romanus, Barleduchius, Cataldus & alij annotarunt, ita vix singula numero retulerit, qui singula operis verba in censum aduocarit? Cui vel rigidissimo Heraclito risum non excutiant non tantum rubricata pagellæ, & ad falsitatis fucum potius quam veritatis ornatum purpurißo eleganter interstinctæ, sed etiam grandis ille ellipsoidem, volutarum, securicularum, Scalprorum apparatus, ad magnificam quamdam Problematum substructionem, in qua tandem non nobilis ἀποδείξεων chorus degat, sed vilissima sophismatum turba niduletur? Denique quem non misereat hominis, qui ante secunda adeo existimationis aura, tum propria tum paterna eruditione excitata honoriumque gloriæ velificatus fuerat, momento in ipso pene portu naufragium fecisse, & partam tot alijs operibus laudem vno opusculo decoxisse. Sic habeant qui vltra sobrietatem, & crepidam sapere volunt, & qui mediæ regionis limites egreßi in eam temerario ausu transcendere conantur, in qua cum maioris splendoris efficaciam non robustioribus Philosophiæ neruis colligatæ sed fluxa Philologiæ caratura compactæ ingenij alæ ferre non valeant, soluta tandem impar viribus onus in dedecoris pelagus deponunt, ac Icario lapsu vectoribus suis æternum ex ignominia nomen acquirunt.

Scal. Cyclomet. lib. 1. ad lectorem.

Scio quid hominem excusare poßit, longus scilicet, vt ipsemet ait, ac molestus morbus non tantum corporis sed etiam animi, a quo nondum sese receperat cum illa scriberet: apparet ita rem habuisse, eamque ægritudinem mentis lyenteriam fuisse, ex qua tam sordidæ paralogismorum deiectiones, ac foedissima linguæ calamique proluuies, qua chartam verius, quam, quod maxime volebat, Archimedis, aliorumque præstantissimorum Mathematicorum famam deturpauit. Sed heus tu, inquies, itane in defunctum sæuis, ac tan-

Plin.

quam

quam larua cũ mortuis luctaris, aut instar nocturni latronis innocuũ cadauer expolias? annon times ne te manium eius vltrix aliquis stylus, vt olim Niconis statua æmulum opprimat? Testor superos me non maleuolentia adductum calamum armaſse, quæ enim mihi simultas eſse poſsit cum homine clarissimo, ignoto, mortuo? sed veritatis quæ opprimitur, præclarissimorum virorum quorum fama læditur, denique totius Reipublicæ Mathematicæ, ac tui etiam amore, mi Lector, qui pellaci hominis facundia, tanquam Sirene, in altos errorum scopulos attrahi fortaſse poſses, ni eſſet qui inclamaret.

Plato 5. de Rep.

Suidas, & Pausanias.

Heu fuge fallaces terras.

Virg. 2. Æn.

efficeretque vt in tutiorem stationem studiorum cursum auerteres. Immo statueram totum illud opus tanquam Augiæ stabulum singulis erroribus expurgare, sed cum animaduertiſsem eos sua multitudine vel Herculeum laborem superaturos, cæptis destiti, contentus ad communem vtilitatem eos digito indicaſſe. Atque hæc non omnino παρεργῶς; Vt vero ad suam semitam orationis cursus redeat, ex dictis efficio tam circuli in quotlibet partes diuisionem, quam eiusdem tetragonismum inter porima nondum ascitam eſse, sed vt Marinus antiquus Gemetra annotauit, adhuc inter ἄπορα recensenda. Vtrum vero eadem ποριστὰ sint, ac fieri tandem poſsit vt aliquo Problemate soluantur si quæras, respondebit Philoponus ἐν ὑστέροις neutrum antiquos Geometras aggreſsuros fuiſse, ni fieri poſse indicaſſent. Recte; sed quid si eos sua fefelliſſet opinio? Nos ergo, vt tandem ad institutum nostrum in hoc libro veniamus, ostendemus non tantum ex natura rei poſsibile, sed etiam per media Geometrica demonstrabile eſſe vtrumque quæsitum. Hinc Dinostrati quadratricem extra circulum productam ad legitimum tetragonismi vsum non per vltimum eius punctum, sed per tangentem nouo inuento aptabimus: mox lineas ad vtrumque munus obeundum plures delineabimus, pluresque conditiones demonstrabimus, quarum qui vel vnam aliquando ad effectionem Geometrico Problemate deduxerit, is etiam totum hoc negotium effectum dederit. Denique ex huiuscemodi verius linearum figmentis, quam lineis varia Problemata efformabimus, quæ non leuem etiam in Geometricis vsum sunt habitura.

Marinus in data Euclidis.

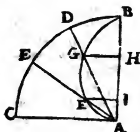
DEFINITIONES.

I.



I circa diametrum Quadranti manens alter radiorum, qui angulum rectum comprehendunt ita conuertatur, vt punctum a centro per radium, & extremitas per circunferentiam Quadrantis eadem proportione moueantur: describet punctum ex centro lineam curuam, quæ *Spiralis Quadrantis*, dicatur.

Sit quadrans ABC. cuius centrum A. radius AC. rectum angulum cum AB. comprehendens; extremitas in Quadrantem desinens C. Conuertatur AC. circa A. ac moueatur A. punctum in F. & punctum C. in E. ita vt quæ ratio AF. ad AC. seu AE. Eadem sit CE. ad CB. item vt AG. ad AD. id est, AC. ita sit CD. ad CB. atque ea proportio in toto motu seruetur: describet punctum motum ex A. lineam curuam AFGB. quæ vocetur Spiralis Quadrantis.



Esse autem spiralem constat ex Archimede ad proposit. 11. de lineis spiralibus, & Pappo Alexandrino ad proposit. 18. lib. 4. collectionum mathematicarum; estque quarta pars (habita ratione temporis, & motus) spiralis integra reuolutione descriptæ, & radius AC. quarta pars rectæ lineæ quam in prima circulatione punctum pertransit.

II.

PArs lineæ rectæ inter principium ſpiralis, & lineam ſpiralem, vocetur *Radius Spiralis* : & radius compræhendens vtrumque extremum dicatur *Diameter Spiralis.*

Vt rectæ AF.AG.AB.inter punctum A. quod eſt principium lineæ ſpiralis (ex Archimede ad 11. prop.de lineis ſpiralibus) & lineam ſpiralem AFGB.interceptæ dicantur Radij ſpiralis: & AB.vtrumque extremum connectens, Diameter Spiralis.

III.

PErpendiculares à punctis, vbi ſpiralem eius radij ſecant, in latus Quadrantis erectum, ſeu diametrum ſpiralis ductæ dicantur *Sinus Spiralis:* atque omnium maximus (augentur enim à principio vſque ad maximum, à quo rurſus deficiunt, vt oſtendetur poſtea) dicatur *Sinus Spiralis maximus.*

Vt perpendiculares à punctis F.I.in latus AB.dicantur ſinus ſpirales: & ſi omnium maximus ſit FI. hoc nomine compelletur.

IIII.

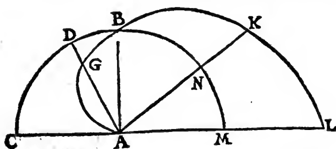
RVrſus quælibet pars ſpiralis dicatur *Spiralis partialis:* & recta eius extrema complectens *Diameter;* habeatque ſuos radios ac ſinus, inſtar ſpiralis quæ deſcribitur in Quadrante.

Vt AFG. est Spiralis partialis, cuius Diameter AG. vnus radiorum AF. Sinus AI.

V.

QVod si supradictus motus continuetur, ita vt extremitas semidiametri arcum semicirculi, punctum vero a centro lineam diametro æqualem similiter percurrat, describetur spiralis semicirculi, quæ erit dimidia pars (habita ratione temporis & motus) piralis integra reuolutione descriptæ.

Vt si extremitas semidiametri moueatur per B. in N. & punctum a centro in K. ita vt sit ea ratio AB. semidia-



metri ad rectam AK. quæ Quadrantis CB. ad arcum CBN. continuabitur spiralis ab A. in K. atque ita deinceps vsque in L.

VI.

NOn aliter in Quadratricibus, Radij dicantur qui a centro circuli, in quo describuntur, ad lineam Quadratricem; sinus qui à punctis vbi radij Quadratricem secant, perpendicula-

diculares ad alterum latus Quadrantis, & ad alterum paralleli ducuntur: quæ omnia ex demonstrationibus apparebunt.

SCHOLIVM.

Sed audio Pappum Alexandrinum Collect. lib. 4. p. 24. huiusmodi lineas reprehendentem, quod per ignotam adhuc, atque irrepertam circuli, & recta proportionem describantur. Recte id quidem, si ea proportio etiam τῶν ἀδυνάτων numero contineretur, neque κατὰ τὴν φύσιν possibilis esset. At vero res est haud insolens, tum in Physicis, tum in Mathematicis, vt ex iis quæ non sunt, esse tamen possunt, quid futurum sit, fierive possit hypotheticè demonstretur. Latet adhuc ratio inueniendarum, inter duas datas, duarum mediarum proportionalium, quod tamen inueniri queant, indicant varia Mesolabia a præstantissimis Geometris, apud Eutocium, excogitata. Hinc non absurde licet argumentari: Si inter duas datas duæ media proportionales reperiantur, erit cubus prima ad cubum secundæ, vt prima ad quartam; at vero impossibilis non est illa inuentio, igitur potest esse ratio cubi ad cubum quæ datarum linearum. Quare si ostenderimus posse lineam rectam, ac circulum in easdem rationes secari, non inepte Helicum, & Quadratricum descriptionem institutam esse probabimus. Si enim fieri possit hæc diuisio, etiam puncta tam in linea recta, quam in circulo mota, modo supradicto, partes proportionales auferre possunt; ideoque lineam Spiralem, Quadratricem, Diuisiuam, delineare. Ac proinde, quæ inde efficientur demonstrationes, non quidem ex datis procedent, sed ἐκ τῶν πορισθέντων ex quibus non minus certo quantitatis affectiones, quam ἐκ τῶν δεδομένων comprobabuntur. Quod vero possibilis sit proportionalis hæc diuisio, sequentibus duobus Lemmatis ostendemus.

Postulatum.

Lineam curuam extendi posse.

LEMMA I.

SI linea curua extendatur, vt extendi amplius non possit; erit linea recta.



Linea recta A. extendatur, ita vt amplius extendi non possit, sitque hoc modo extensa B. Dico B. esse lineam rectam. Si enim B. non sit linea recta, erit curua, at linea curua extendi potest; Igitur B. extendi potest; at supponebatur non amplius posse extendi. Quod est absurdum. Igitur B. est linea recta. Quod erat demonstrandum.

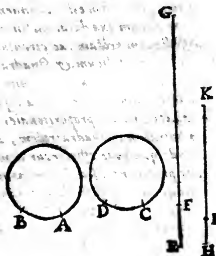
Postulatum huius.

LEMMA II.

POtest data linea recta dati circuli perimetro similiter secari.

Sit data recta HK. & datus circulus AB. Dico rectam HK. posse secari ea proportione, qua secantur peripheriæ circuli AB. Sumatur in circulo AB. pars AB. cui in æquali circulo sumatur pars æqualis CD. ac extendatur perimeter circuli CD. quantum potest, migrabit in lineam rectam, quæ sit EG. in qua remaneant eadem diuisionis puncta, quæ erant

Lemm. 1. huius.

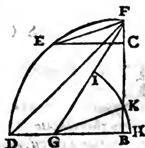


in circulo: videlicet E. F. puncta sint eadem punctis C. D. Hinc data HK. rectæ EG. similiter secetur in I. Quoniam est vt KH. ad HI. ita GE. ad EF. & vt GE. ad EF. ita peripheria tota circuli CD. ad partem CD. (est enim proportio æqualitatis, cum tota EG. sit peripheria ipsa totius circuli extensa, & EF. pars rectæ EG. sit eadem parti CG.) & vt peripheria tota circuli CD. ad partem CD. ita peripheria totius circuli AB. ad partem AB. ergo vt KH. ad HI. ita peripheria circuli AB. ad partem AB. linea igitur data HK. dati circuli AB. perimetro similiter secari potest. Quod erat demonstrandum. 10. 6.

LEMMA III.

MAior est ratio sinus totius ad siuum versum arcus Quadrante minoris, quam peripheriæ Quadrantis ad dictum arcum.

In circulo cuius centrum B. sit peripheria Quadrantis DF. arcus minor Quadrante EF. ductis finibus rectis DB. EC. erunt BF. CF. sinus versi, & BF. etiam sinus totus, qui cum sit maior quam EC. accipiatur in æquali BD. recta BG. æqualis ipsi EC. item cum sit maior quam CF. accipiatur BK. æqualis CF. & connectantur DF. EF. GF. GK. ac centro G. distantia GK. describatur circulus HKI. secans DB. productam in H. & GF. in I. Dico maiorem esse rationem BF. ad FC. quam DF. arcus ad arcum FE. Nam quia in triangulis GBK. ECF. rectangulis ad B. C. æqualia sunt latera GB. BK. lateribus EC. CF. ex hypothesi, erunt anguli BGK. CEF. æquales. Iam vero maior 4. 1.



ior

8. 5. ior eſt ratio ſectoris GHK. ad ſectorem GKI. quam eiuſ-
dem ſectoris GHK. ad triangulum GKF. & ſectoris GHK.
ad triangulum GKF. maior eſt ratio, quam trianguli GBK.
ad idem triangulum GKF. ergo a primo ad vltimum, ma-
33. 6. ior eſt ratio ſectoris GHK. ideſt arcus HK. ad ſectorem
GKI. id eſt ad arcum KI. quam trianguli GBK. id eſt rectæ
1. 6. BK. ad triangulum GKF. id eſt ad rectam KF. & compo-
nendo & per conuerſionem rationis minor ratio IH. ad
33. 6. HK. id eſt anguli FGH. ad angulum KGH. quam rectæ
16. 1. FB. ad rectam BK. ſed angulus BDF. internus minor eſt
8. 5. externo FGH. Igitur minor eſt ratio anguli BDF. ad an-
gulum BGK. id eſt ad angulum CEF. qui modo oſtenſus
eſt ei æqualis, quam anguli FGH. ad angulum KGB. id
eſt, CEF. Cum ergo minor ſit ratio anguli BDF. ad an-
gulum BGK. id eſt CEF. quam anguli BGF. ad angulum
BGK. id eſt CEF. & minor ratio anguli BGF. ad BGK. an-
gulum, id eſt ad CEF. quam FB. ad BK. erit a primo ad vl-
timum, minor ratio BDF. ad CEF. quam FB. ad BK. id
eſt, quam FB. ad FC. ſunt enim poſitæ æquales BK. &
15. 5. FC. ſed vt angulus BDF. ad angulum CEF. ita arcus DF.
20. 3. ad arcum EF. (ſunt enim dicti anguli dictorum arcuum,
aut potius angulorum arcubus ſubtenſorum dimidij)
maior igitur eſt ratio BF. ſinus verſi arcus DF. id eſt, ſinus
totius ad CF. ſinum verſum arcus EF, quam arcus maioris
DF. nimirum Quadrantis ad arcum EF. Quadrante mi-
norem. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

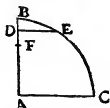
Eadem demonſtratio fieri poteſt, ſiue HD. ſit ſinus totus, ſiue non; modo ſit maior quam ſinus CE. vt manifeſte apparet ex figura. Hoc autem aliter demonſtrauimus l. 6. primo theoremate 30. Sed præſentem dimonſtrationem quia elegantior viſa eſt, addere voluimus.

LEM-

LEMMA IIII.

SI peripheria Quadrantis, eiusque latus erectum, a puncto in quo coëunt similiter diuidantur: perpendicularis a termino arcus proportionalis in latus demissa aufert ex latere, versus eius extremum, partem minorem parte proportionali lateris.

Peripheria Quadrantis BC. cuius centrum A. & latus erectum AB. ex puncto B. vbi coëunt similiter diuidantur, id est, sit BC. ad BE. vt BA. ad BF. & a termino E. arcus proportionalis BE. demissa in latus AB. perpendicularis ED. auferat partem DB. Dico DB. esse minorem quam FB. Nam cum DB. sit sinus versus arcus BE. maior erit ratio sinus totius AB. ad sinum versum DB. quam peripheriæ Quadrantis BC. ad arcum BE. sed vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BE. ita ex hypothesi est AB. ad BF. maior igitur est ratio AB. ad BD. quam AB. ad BF. minor igitur est DB. quam FB. Quod erat demonstrandum.



Lemm. 3. huius.

10. 5.

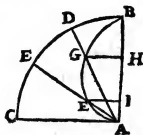
THEOREMA I. PROPOS. I.

RAdij Spiralis Quadrantis sunt in ratione, in qua sunt arcus Quadrantis inter eosdem radios ad peripheriam productos, & basim eiusdem Quadrantis compræhensi.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFGB. radij Spiralis AF. AG. qui producti secent peripheriam Quadrantis in punctis E. D. Basis Quadrantis AC. latus eiusdem erectum,

ctum, seu diameter Spiralis AB. Arcus inter basim AC. & puncta E. D. compræhensi sint EC. DC. Dico esse vt AF. ad AG. ita arcum CE. ad arcum CD. Est enim, ex

defin. 1. huius.

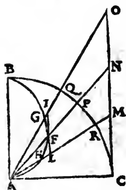


descriptione, seu definitione Spiralis, vt AF. ad AC. ita arcus CE. ad arcum CB. & vt AG. ad AC. ita CD. ad CB. & conuertendo vt AC. ad AG. ita CB. arcus, ad arcum ad arcum CD. ergo ex æqualitate vt AF. ad AG. ita arcus CE. ad arcum CD. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI diametro Spiralis in Quadrante parallela eandem Spiralem contingat: secans per punctum contactus ducta ad suum arcum minimam inter omnes secantes proportionem habet.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFB. ac Spiralis diameter AB. cui parallela sit recta LI. quæ Spiralem tangat in F. puncto, per quod ex centro A. Quadrantis ducatur AFN. secans arcus CP. occurrens tangenti CN. eiusdem arcus, & parallelæ ipsi AB. in puncto N. Dico secantem AN. ad suum arcum CP. minorem habere proportionem, quam habeat quælibet alia secans ad suum. Ducantur quælibet aliæ secantes vltra citraque AO. AM. quarum illa secet Quadrantem in Q. ista in R. ista rectam LI. quantumlibet productam



ductam in I. ista in L. (secabunt autem, cum ei parallelam CO. secent in M. & O.) illa spiralem in G. ista in L. Quoniam recta LI. spiralem tangit in F. in illo tantum puncto tanget: Cadent igitur puncta I. L. ideoque partes GI. HL. extra spiralem. Cumque in triangulo OAN. parallelæ sint ON. IF. erit vt OA. ad IA. ita NA. ad FA. & permutando, OA. ad NA. vt IA. ad FA. maior autem est ratio IA. ad FA. quam GA. ad FA. Igitur maior est ratio OA. ad NA. quam GA. ad FA. vt vero GA. ad FA. ita arcus QC. ad arcum PC. Igitur OA. ad NA. maior est ratio, quam arcus QC. ad arcum PC. & permutando secantis OA. ad suum arcum QC. maior est ratio, quam secantis NA. ad suum arcum PC. Eodemque modo ostendetur, maiorem esse rationem secantis MA. ad suum arcum MC. quam secantis AN. ad suum PC. Idemque sequetur in qualibet alia secante: ergo secans NA. ad suum arcum PC. minimam inter omnes secantes proportionem habet. Quod erat ostendendum. Vocentur autem puncta F. P. minimæ proportionis in Spirali, & in quadrante: & secans AN. minimæ proportionis.

Proclus in 29. 1. Archim. p. 13. de lineis spiralibus.

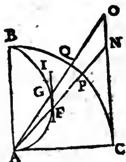
2. 6.
8. 5.
13. 5.
1. huius.

THEOREMA III. PROPOS. III.

Secans minimam ex cæteris secantibus ad suum arcum proportionem habens spiralem Quadrantis diuidit in puncto, per quod parallela diametro spiralis, seu tangenti Quadrantis ducta dictam spiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. in quo secans AN. occurrens tangenti Quadrantis CO. in puncto N. secans Quadrantem in P. Spiralem Quadrantis in F. habeat ad suum arcum PC. minimam ex cæteris secantibus rationem: ac per punctum F. ducatur FGI. parallela tangenti CO. Dico quod

recta FGI. spiralem tangit in F. Si enim non contingit, secet in punctis F. G. ita vt FGI. sit vna recta ipsi CO. parallela, & ducatur per punctum G. secans AO. occurens tangenti in O. & Quadranti in Q. Quoniam parallela ponitur FGI. ipsi CO. erit vt OA. ad AG. ita NA. ad AF. & permu-

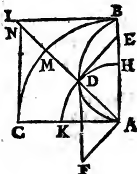


2. 6. tando vt OA. ad NA. ita AG. ad AF. sed vt AG. ad AF. ita arcus

1. huius. QC. ad arcum PC. ergo vt OA. ad NA. ita arcus QC. ad arcum PC. & permutando, æqualis erit proportio OA. ad suum arcum QC. proportioni NA. ad suum arcum PC. Quod est absurdum, cum proportio NA. ad arcum PC. ponatur minima qualibet proportione alterius secantis ad suum arcum. Igitur secans minimam ex cæteris &c. Quod erat probandum.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Tangens complementi arcus, ad quem eiusdem secans minimam habet rationem, est æqualis arcui.



Sit Quadrans ABC. cuius tangens CN. secans AN. arcus CM. minimam cum eo proportionem habens, ac secans spiralem Quadrantis ADB. in puncto D. sitque arcus CM. complementum arcus MB. cuius tangens BL. Dico tangentem BL. esse æqualem arcui MC. Centro A. per punctum D. describatur Quadrans KDH. & per idem punctum D. ducatur infinita

finita DF. parallela tangenti CN. atque ex puncto A. ad DA. ducatur perpendicularis AF. quæ occurret ipsi DF. in F. Denique ducatur DE. perpendicularis ad DA. ideoque tangens arcus DH. Constat rectam AF. esse æqualem arcui DK. Rursus quoniam in Quadrilatero AEDF. anguli EDA. DAF. sunt recti, parallelæ sunt DE. FA. Sed & parallelæ sunt DF. EA. vtraque enim ponitur parallela ipsi CN. Igitur parallelogrammum est AEDF. & opposita latera AF. DE. æqualia. Quare cum AF. sit æqualis arcui DK. erit DE. etiam æqualis arcui DK. Vt autem arcus KD. ad Quadrantem KH. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. & permutando, vt arcus KD. ad arcum CM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem CB. & vt Quadrans KH. ad Quadrantem CB. ita semidiameter AD. ad semidiametrum AM. & vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. (nam cum æquiangula sunt triangula EDA. LBA. ob communem angulum ad A. & rectos ad D. B. erit vt AD. ad DE. ita AB. ad BL. & permutando) erit a primo ad vltimum, vt arcus KD. ad arcum CM. ita DE. ad BL. & permutando, vt arcus KD. ad rectam DE. ita arcus CM. ad rectam BL. est autem probatus arcus KD. æqualis rectæ DE. igitur arcus CM. æqualis est tangenti complementi BL. Quod erat demonstrandum.

19. Spiral. Archimed. 20. Spiral. Archimed. 27. 1. 30. 1. 35. definit. 34. 1. Schol. 33. 6. Pappus l. 8. p. 22. & p. 15. 5. elem. 32. 1. 4. 6.

SCHOLIVM.

Hinc manifestum est, si problemate aliquo Geometrico secans minima proportionis reperiatur, sequi tangentem complementi arcus, cuius est secans, esse æqualem illi arcui.

THEOREMA V. PROPOS. V.

Tangens complementi arcus, ad quem eiusdem secans minimam habet rationem,

est æqualis Quadranti circuli à principio lineæ spiralis, per punctum vbi secans minimæ proportionis spiralem secat, descripti.

Sint omnia quæ superiori propositione. Dico tangentem BL. esse æqualem Quadranti KH. Quoniam triangula ADE. ABL. communem habent angulum ad A. &
32. 1. 4. 6. rectos ADE. ABL. sunt æquiangula. Igitur vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. Sed vt AD. ad AM. id est, ad AB.
1. huius. Schol. 33. 6. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. id est arcus KD. ad Quadrantem KH. Igitur vt recta DE. ad BL. ita arcus KD.
4. huius. 9. 5. id est, recta DE. illi æqualis, ad quadrantem KH. æquales igitur sunt BL. recta tangens arcus BM. & Quadrans KH. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

4. huius. *Hinc deducitur arcum CM. esse æqualē Quadranti KH. est enim arcus CM. æqualis tangenti BL. quæ modo probata est æqualis Quadranti KH.*

COROLLARIVM. II.

Sequitur præterea ex dictis, tam Quadrantem KH. quam arcum CM. esse medio loco proportionalem inter arcum DK. & Quadrantem ABC. nam vt KD. ad KH. ita ostensum
Pappus lib. 8. p. 22. & 15. 5. element. Corol. 1. 5. huius. *est esse DA. ad AM. & vt DA. ad AM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem BC. ergo vt arcus KD. ad quadrantem KH. ita Quadrans KH. id est arcus CM. ad Quadrantem BC.*

COROLLARIVM III.

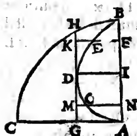
Denique patet arcum DH. esse minorem arcu DK. id est arcum MB. arcu CM. Nam arcus KD. est æqualis re-
Archimed. 1. de sphæra & Cylindro. *cta tangenti DE. at tangens DE maior est quam arcus DH. igitur arcus DH. est minor arcu DK.*

THEO-

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI diametro ſpiralis tam intra Quadrantem deſcriptæ, quam partialis, parallela ducatur tangens ipſam ſpiralem; & à puncto contactus ſinus ſpiricus ducatur: is erit omnium ſinuum ſpiricorum maximus.

Diametro ſpiralis AB. intra Quadrantem ABC. deſcriptæ, ducatur recta HG. parallela tangens ſpiralem in D. & ex D. ducatur DI. ſinus ſpiricus. Dico DI. eſſe omnium ſinum ſpiricorum maximum. Ducantur enim quilibet alij ſinus FE. NO. ſupra infraue ſinum DI. ſecantes Spiralem in E. & O. & tangentem GDH. in K. M. Cum recta HDG. ex hypotheſi tangat ſpiralem in D. in illo ſolo puncto tanget. Cadet igitur tota GH. extra ſpiralem. Quare punctum K. erit extra ſpiralem: eſt autem punctum E. in linea ſpirali, maior igitur eſt FK. quam FE. totum quam pars; Quoniam autem ex deſcriptione parallelæ ſunt DK. IF. itẽ KF. & DI. parallelogrammum eſt DIFK. æquales igitur ſunt KF. DI. ſed KF. maior eſt oſtenſa quam EF. igitur DI. maior eſt quam EF. Eodemque prorſus modo oſtendetur DI. maior quam NO. & quam quilibet alius ſinus ſpiricus. Atq; eadem omnino demonſtratio ſuccedet, ſi ABD. ponatur quælibet pars ſpiralis, vt euidentiſſimum eſt. Igitur ſi diametro ſpiralis &c. Quod erat demonſtrandum.



13, p. de ſpiralibus Archimedis.

35. defin.

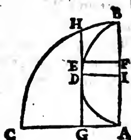
34. 1.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Recta perpendicularis ad sinum maximum, a puncto vbi is spiralem Quadrantis, aut partialem secat, eandem spiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. Spiralis Quadrantis ADB. quam secet DI. sinus maximus in D. a quo ad ipsam DI. ducatur perpendicularis GDH. Dico quod recta GDH. lineam spiralem tangit in D. si enim non ita sit, secet eam, ac transeat per puncta D. E. & ducatur EF. ipsi DI. parallela, secans AB. in F. Cum recti sunt anguli ad I. ex definitione, & D. ex suppositione, parallelæ sunt AB GH. id est, IF. & DE. sed & parallelæ sunt EF. DI. ex hypothesi: igitur parallelogrammum est EFID. æqualia igitur sunt latera EF. DI. non est igitur DI. maior quam EF. ac proinde non est omnium sinuum spiricorum maximus: Quod est contra hypothesin. Idem manifeste contingit in spirali partiali. Igitur perpendicularis &c. Quod erat demonstrandum.



defin. 3. huius.

28. 1.

35. defin.

34. 1.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Spiralem in eodem puncto duæ rectæ non contingunt.

Sit linea spiralis ADE. in qualibet circulatione descripta, & contingat ipsam recta HDG. in puncto D. iungaturque AD. ad principium spiralis; & centro quidem A. interuallo AD. circulus describatur CDB. qui secet principium circulationis AC. in C. & ducatur AK. ipsi AD. perpendicularis quæ coibit cum contingente HDG. in G. Dico

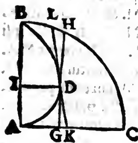
18.19.20. de lineas spiralibus Archimedis.

Dico non posse duci aliam contingentem præter HDG. quæ spiralem tangat in D. si enim potest, ducatur, & sit LDK. quæ coibit cum AK. non in 14. pron.
puncto G. alias duæ rectæ HDG. LDK. spatium comprehenderent, sit in puncto K. quod, vel cadat inter G. & A. puncta, vel vltra, ita vt AK. sit vel totum respectu ipsius AG. vel pars. Constat ex ijs quæ demonstrauit Archimedes propositionib. 18. 19. 20. de lineis spiralibus, cum contingentes sint vtraque HDG. LDK. tam rectam AG. quam rectam AK. esse æqualem arcui CD. æquales igitur 1. pron.
sunt AG. AK. pars & totum, Quod est absurdum, Non ergo tangent rectæ HG. LK. Spiralem in eodem puncto D. Quod erat probandum.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in puncto in quo sinus spiricus omnium maximus spiralem Quadrantis, aut partialem secat, recta eandem spiralem tangat: ea erit dicto sinui perpendicularis.

In puncto D. in quo Sinus spiricus DI. omnium maximus spiralem Quadrantis ADB. secat, recta HDG. Eandem spiralem tangat. Dico rectam HDG. esse ipsi DI. perpendicularem. Si enim res non ita habeat, sit alia quæpiam LDK. ipsi DI. perpendicularis. Quoniam spiralem ADB. secat sinus spiricus omnium maximus DI. & à puncto sectionis D. ipsi sinui DI. perpendicularis ponitur KDL. ea



spi-

7. huius. spiralem tanget in D. sed etiam spiralem tangit in D. recta GDH. Igitur spiralem in eodem puncto tangunt duæ
8. huius. rectæ HDG. LDH. Quod est absurdum. Nec aliter procedit demonstratio, in spirali partiali quod clarius, quam vt superflua repetitione indigeat.

THEOREMA X. PROPOS. X.

Sinus spirici maximo propriores maiores sunt remotioribus.

Sit Spiralis Quadrantis, aut partialis ADB. cuius sinus spiralis maximus DI. & constituantur primo inter maximum, & principium lineæ spiralis A. duo sinus EF. GH. ille vicinior maximo, hic remotior. Dico sinum EF. esse

maiorem sinu GH. Tangat recta PQ. spiralem in E. (per datum possibile) cui parallela sit AM. & ad vtrumque
29. 1. perpendicularis EN. secans MA. in N. & AB. in K. ipsi vero EK. ex puncto G. ducatur parallela GOL. secans MA. in O. perpendiculariter, & AB in L. manifestum est AM.
4. defin. huius. esse dimetientem spiralis partialis AEM. cui cum parallela ducta sit PEQ. tangens spiralem in E. & a puncto conta-
defin. 3. & ctus E. ductus sit sinus spiricus EN. is erit omnium sinuum
4. huius. 6. huius. spiricorum qui in spirali partiali AEM. duci possunt maximus. Quare maior est quam sinus spiricus GO. eiusdem

par-

partialis ſpiræ, ſed & maior eſt NK. quam OL. (Nam cum æquiangula ſint triangula ANK. AOL. ob rectos ad O.N.& communem ad A. erit vt AN. maior ad AO. minorem ita NK. maior ad OL. minorem) tota igitur EK. maior eſt, quam tota GL. Rurſus cum æquiangula ſint triangula KEF. LGH. (nam parallelæ ſunt EK. GL. item EF. GK. ex hypotheſi, & anguli ad F. H. recti) erit vt KE. ad EF. ita LG. ad GH. maior autem oſtenſa eſt KE. quam LG. maior etiam eſt EF. quam GH. Quod primo erat demonſtrandum. 32. 1. 4.6.& 14.5. 4. 6. 14. 5.

Cadant ſecundo duo ſinus ſpirici ſupra ſinum ſpiricum maximum DI.& fiant reliqua, vt in prima parte huius propoſitionis. Eodem prorſus modo probatur AM. eſſe dimetientem. EN. omnium ſinuum ſpiricorum partis AEM. maximum; ideo maiorem quam GO. Iam vero (in quo differt prima pars à ſecunda) minor eſt KN. quam LO. (Nam cum triangula AOL. ANK. ob parallelas LO. KN. habeant angulos ad N. O. item ad K. L. item ad A. æquales, ſunt æquiangula ideoque vt AO. ad OL. ita AN. ad NK. & maior eſt AO. quam AN. ideoque & maior OL. quam NK.) ſi igitur ex maiori EN. detrahatur minor KN. & ex minori GO. maior LO. remanebit EK. maior quam GL. Hinc eodem modo, quo in prima parta probabitur EF. maior quam GH. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum. 32. 1. 4. 6. 14. 5.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SEcans minimæ proportionis tranſit per punctum vbi ſinus ſpiralis Quadrantis maximus ſpiralem ſecat.

Hoc euidenter deducitur ex ſuperioribus propoſitionibus. Nam parallela tangenti Quadrantis, aut diametro Spiralis quadrantis, ipſam Spiralem tangit in vno tantum 13. de linea ſpiralibus. Archim.

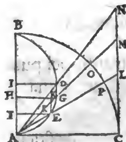
 puncto:

3. huius. puncto: at vero per illud punctum transit secans minimam ex cæteris secantibus ad suum arcum proportionem habens, & in eodem puncto sinus spiricus omnium in Quadrante maximus spiralem secat: Igitur secans minimæ
6. huius. proportionis transit per punctum vbi sinus spiricus Quadrantis maximus spiralem secat. Quod erat &c.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duæ secantes, vtraque aut vltra aut citra secantem minimæ proportionis ducantur: remotior ad suum arcum maiorem habet rationem, quam propinquior.

In Quadrante ABC. sit secans minimæ proportionis AN. occurrens tangenti CN. in N. & ducantur duæ aliæ secantes AM. propinquior, AL. remotior, vtraque citra secantẽ AN. quæ secent Quadrantem in punctis O. P. Dico secantem AL. ad suum arcum PC. maiorem habere rationem quam secantem AM. ad arcum OC. Describatur intra Quadrantem Spiralis ADB. in qua sinus spiricus
11. huius. omnium maximus DI. secans spiralem in D. transibit secans AN. per punctum D. Igitur secantes AM. AL. spiralem secabunt citra punctum D. vt in punctis G. E. per quæ ducantur sinus
10. huius. spirici GH. EF. erit GH. sinus spiricus maximo DI. vicinior, maior quam EF. remotior. Quare ducta EK. ad FE. perpendicularis, aut ipsi AB. seu CN. parallela ipsam HG. secabit in K. inter puncta G. & H. ideoque ipsam GA. inter puncta G. A. videlicet in R. maiorque erit AG. totum quam pars AR. Iam vero cum in triangulo MAL.



MAL. basi ML. ducta sit parallela ER. erit vt AL. ad AM. ita AE. ad AR. maior autem est ratio AE. ad AR. quam AE. ad AG. igitur maior est ratio AL. ad AM. quam AE. ad AG. sed vt AE. ad AG. ita arcus CP. ad arcum CO. Igitur maior est ratio AL. ad AM. quam arcus CP. ad arcum CO. & permutando, maior ratio secantis AL. ad suum arcum CP. quam secantis AM. ad arcum CO. Quod primo demonstrandum erat.

2. & 4. 6.
8. 5.
13. 5.
1. huius.

Idem omnino sequitur, si vtraque secans cadat supra AN. vt manifeste patet ex figura. Quare si duæ secantes &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

DAta secante, quæ non sit minimæ proportionis, potest duci alia secans quæ eandem habeat rationem ad suum arcum, quam data ad suum.

In Quadrante ABC. sit secans data AEL. occurrens tangenti CL. in L. quæ non sit minimæ rationis, cuius arcus PC. Dico posse in Quadrante duci aliam secantem quæ eandem ad suum arcum rationem habeat, quam secans AL. ad arcum PC. Sit in Quadrante descripta spiralis ADB. in qua sinus maximus DI. cui parallelus ducatur sinus spiricus EF. & ex E. ad FE. perpendicularis, aut ipsis

AB. CM. parallela EG. secans spiralem in G. & ducatur AG. recta occurrens peripheriæ Quadrantis in O. & tangenti in M. erit CM. secans arcus OC. Dico tangentem AM. ad suum arcum OC. eam habere rationem, quam habet secans AL. ad arcum PC. Nam cum in triangulo
2. & 4. 6. MAL. basi ML. parallela ducta sit EG. erit AM. ad AL. vt
1. huius. AG. ad AE. sed vt AG. ad AE. ita arcus OC. ad arcum PC. ergo vt AM. ad AL. ita arcus OC. ad arcum PC. & permutando, vt secans AM. ad suum arcum OC. ita secans AL. ad arcum PC. Quod erat demonstrandum.

Manifestum autem est quod punctum D. cadit inter puncta G. & E. alias enim si vtrumque punctum E. G. caderet aut citra, aut vltra punctum D. haberet remotior secans ad suum arcum maiorem rationem, quam propinquior; quod est absurdum, cum ostensa sit vtraque eandem habere rationem. Quod etiam inde constat, quia si-
6. huius. nus spiricus FE. minor est quam DI. ex 6. huius, quare perpendicularis EG. secabit ipsam DI. in K. inter puncta D. I. quare producta secabit spiralem in G. supra DI.

PROBLEMA I. PROPOS. XIV.

Qvadratricem in Quadrante describere, & extra Quadrantem producere, atque toti circulo accommodare.

Sit circulus BCDE. cuius centrum A. per quod transeant duæ perpendiculares BD. CE. secantes circulum in quatuor Quadrantes, in quorum vno ABC. sit basis AB. & latus erectum AC. Conuertatur AB. circa A. centrum, tanquam verticem, ita vt punctum B. perueniat in N. & eodem tempore linea recta coincidens cum AB. moueatur ex A. in F. in toto motu perpendicularis ad latus erectum AC. aut parallela basi Quadrantis AB. ita vt quæ proportio est CB. ad BN. arcum quem percurrit punctum B. ea

sit

sit lateris erecti CA. ad partem AF. quam percurrit punctum A. & in illo motu concurrant duæ rectæ AN. & perpendicularis FG. in puncto G. (concurrent autem cum angulus GFA. sit rectus & GAF. acutus) describet punctum concursus lineam curuam MGC. quam esse Quadratricem Dinostrati constat ex Pappo lib. 4. prop. 15. & Clauio ad vltimam proposit. 6. element. Quod vero ea tota sit in Quadrante, ita demonstrabimus. Sit quodlibet punctum Quadratricis modo descriptæ G. a quo perpendicularis intermedia secet latus erectum AC. in F. & diameter Quadrantis per illud idem punctum G. ducta secet Quadrantis peripheriam in N. puncto, a quo ducatur sinus rectus NO. arcus NC. Quoniam, ex descriptione, est vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BN. ita latus erectum AC. ad partem AE. erit per conuersionem rationis, 13. pron.

vt

vt BC. ad CN. ita AC. ad CF. Cum vero CO. sit sinus
Lemm.3.huius. versus arcus NC. maior erit ratio AC. ad CO. quam BC.
ad CN. Quare maior erit ratio AC. ad CO. quam AC. ad
5. pron. 4. 6. CF. minor igitur est CO. quam CF. Quare maior AO.
34. 1. quam AF. Vt autem AO. ad AF. ita AN. ad AG. (æquiangula enim sunt triangula OAN. FAG. ob communem angulum ad A. & rectos ad F. O.) igitur AN. maior est quam AG. ideoque cum punctum N. cadat in peripheriã Quadrantis, cadet punctum G. intra Quadrantem; atque idem demonstrabitur in quolibet alio puncto partis Quadrantis MGC.

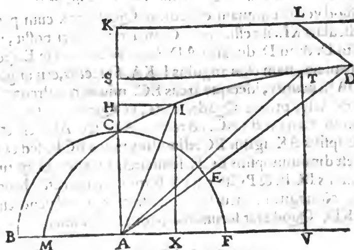
Producetur autem hoc modo Quadratrix. Moueatur punctum B. per C. vsque in P. & punctum A. per C. vsque in H. ita vt quæ proportio BC. ad BP. ea semper sit AC. ad AH. & ducta AP. semidiameter per P. in I. & perpendicularis HI. concurrant in I. (concurrunt autem quia angulus ad H. rectns, & HAI. acutus) atque eadem ratione punctum concursus relinquens sui vestigium describat lineam curuam CIQ. eam vocamus Quadratricem continuatam, quod eodem modo describatur quo ea quæ continetur Quadrance. Quod vero ea cadat extra circulum patet, sumatur enim quodlibet punctum I. Quoniam
19. 1. maior est AI. subtendens angulum rectum ad H. quam AH.
defin. 15. & maior AH. quam AC. totum parte, & AC. æqualis ipsi AP. maior erit AI. quam AP. sed punctum P. cadet in peripheriam circuli, ergo punctum I. cadet extra. Idemque ostendetur in quolibet alio puncto Quadratricis productæ; eritque tota Quadratrix MCIQ. Quadratrix semicirculi BCD. Quod si in inferiori semicirculo alia describatur NER. eo modo quo in superiori existet totius circuli Quadratrix REMCQ. Quod faciendum fuit.

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

SI latus erectum Quadrantis duplicetur extra Quadrantem, & per eius extremum perpendicularis ducatur: ea erit Quadratrici ἀσύμπτωτος.

Sit Quadrans ABC. cuius latus erectum AC. eiusque duplum AK. ac per punctum K. ducta sit perpendicularis KL. sit etiam Quadratrix semicirculi MCT. Dico perpen-



dicularem HL. esse Quadratrici ἀσύμπτωτον. Asymptoton autem vocamus similitudine eius quæ ducitur in Hyperbola, apud Apollonium li 2. con. prop. 1. quæ videlicet quo magis producitur, magis ad Hyperbolam accedit, nec tamen vnquam cum ea concurrit. Primum igitur quod Quadratrix quo vlterius producitur, eo propius ad rectam KL. accedat, ita demonstratur. Producatur basis Quadrantis BA. quantum libet in F. ac perficiatur semicirculus BCF. & ex quolibet puncto I. Quadratricis in basim productam

ductā demittatur perpēdicularis IX. & ducatur AI. itemq; perpendicularis IH. hinc producatur Quadratrix ex I. in T. etiam mouebitur punctum concursus I. in T. & AI. promouebitur in AT. & ducta TS. ad AK. perpendiculari, ascendet HI. in ST. vt constat ex descriptione Quadratricis. Ducatur TV. ad latus Quadrantis productum perpendicularis. Constat HAXI. & SAVT. esse parallelogramma, quorum
34. 1. aduersa larera æqualia sunt. Igitur æqualia sunt SA. TV. Item HA. XI. maior autem est SA. quam HA. maior igitur etiam est TV. quam IX. Igitur propius accedit punctum T. ad rectam KL. quam punctum I. Quod in alijs quoque ostendentur: Id autem primo probandum erat.

Quod verò numquam concurrat Quadratrix cum perpendiculari KL. ita efficitur. Concurrat, si fieri possit, in puncto D. & ad D. ducatur AD. secans circulum in E. (se-
32. 1. cabit autem, nam cum angulus DKA. sit rectus, erit angulus DAK. acutus, ideoque arcus EC. minor quadrante) erit, ex descriptione Quadratricis, vt Quadrans BC. ad arcum BCE. ita recta AC. ad rectam AK. sed AC. est dimidia ipsius AK. igitur BC. dimidius ipsius BCE. sed etiā
9. pron. BC. est dimidius ipsius BCF. semicirculi: æquales igitur sunt arcus BCE. & BCF. pars & totum. Quod est absurdum. Non igitur concurrent Quadratrix & perpendicularis KD. Quod erat secundo loco ostendendum.

COROLLARIVM.

EX duabus superioribus propositionibus constat Quadratricem principio, ac fine carere. Nam ideo primum punctum non habet, quod basis Quadrantis & prima perpendicularis in vnam lineam coincident, quæ sectionem efficere non possunt; vltimo ideo caret, quod duæ, basis Quadrantis & vltima perpendicularis sint parallelæ, ideoque ad concursum vltimi puncti conuenire non possunt. Rursus manifestum est versus finem Quadratricem in infinitum produci, non versus initium.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

QVadratrix non est figura rectilinea, non Circulus, non Coni sectio.

Quod Quadratrix non sit figura rectilinea, apertius est quam vt probari debeat. Sed quod neque Circulus, aut Ellipsis ita probatur. Sit enim, si fieri potest, horum alteruter; erit in figura 14. æ huius, MD. producta eius diameter; cum tam CE. quam ipsius CE. parallelas bifariam diuidat: igitur in recta MD. est centrum figuræ; sit in puncto A. secabitur ergo bifariam diameter MD. in puncto A. æquales igitur erunt MA. & reliqua semidiameter versus D. Quod est absurdum, cum infinita sit pars diametri ab A. versus D. & finita ab A. versus M. At non esse Parabolam, aut Hyperbolam ita demonstramus. In eadem figura 14. æ huius, dicatur MCQ. esse Parabola, aut Hyperbola, erit proculdubio ipsius diameter, atque axis recta MD. cum tam ipsam CE. quam eius parallelas intra figuram ductas bifariam diuidat; cui cum parallela ponatur KL. extrema perpendicularis, ea producta cum Quadratrice conueniet. Quod est absurdum; est enim ἀσύμπτωτος. Igitur quadratrix non est Parabola, aut Hyperbola. Quod est præterea demonstrandum.

28. 2. Conic.

30. 2. Conic. & 15. defin. elem.

Corol. 15. huius.

28. 2. Conic.

26. 2. Conic.

15. huius.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ hac propositione demonstrata sunt colligi videtur, Quadratricem nullum alium habere essendi modum, præter eum quem illi tribuit motus puncti, in quo sese diameter Quadrantis & perpendicularis ad latus erectum Quadrantis interfecant: neque vllum punctum in ea lineâ reperiri, quod concursus ille non efficiat. Quare basim Quadratricis inter ἀδύνατα recensendam, cum dicatur esse pars

basis Quadrantis inter centrum Quadrantis, & punctum Quadratricis in dicta basi, intercepta. Nam punctum Quadratricis in basi neque est, cum ibi sese basis Quadrantis, & prima perpendicularis non secent, sed concurrant; neque esse potest, cum alio modo quam motu intersectionis lineæ Quadratrix non procreetur. Quomodo ergo veteres, referente Pappo Collectionum lib. 4. p. 16. & ab illo, Clauio in comment. in 6. elementorum prop. 4. de Quadratrice, demonstrant basim Quadratricis, quæ reuera nec est, nec esse potest, esse tertio loco proportionalem ad peripheriam Quadrantis, & eius diametrum? Vereor admodum ne illud Theorema aliter proponendum sit, hoc nempe modo, in quo nihil erit quod reprahendi possit.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

SI ex centro Quadrantis, in quo descripta est Quadratrix, alius Quadrans describatur intra Quadrantem, qui aut ipse, aut eius tangens Quadratricem secet: non erit eius basis arcui Quadrantis, eiusque semidiametro tertio loco proportionalis: si vero neque ipse, neque eius tangens Quadratricem secet, erit eius basis arcui Quadrantis, & semidiametro tertio loco proportionalis.

Sit Quadrans ABD. cuius centrum A. basis AB. latus erectum AD. Quadratrix DF. centro A. alius Quadrans AGF. describatur, cuius basis AF. qui Quadrantem ABD. aut secet sua peripheria in H. aut sua tangente FL. in L. Dico non esse vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. Ducatur enim in prima figura perpendicularis HI. in secunda tangens FL. ac dicatur esse vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. sequetur in prima

prima ſubtenſam HI. eſſe æqualem arcui HF. in ſecunda tangentem FL. eſſe æqualem arcui HF. quorum vtrumque eſt abſurdum; Quod quidem quia tum a Pappo lib. 4. prop. 16. tum a Clauio fuſius prop. 4. de Quadratrice demonſtratur, eo lectorem remittimus.

Secundam partem propoſitionis ita probamus nos ex prima. Sit Quadrans ADB. cuius centrum A. baſis AB. latus erectum AD. Quadratrix DE. & Quadrans AGE. cuius baſi AE. qui neque ipſe neque eius tangens EL. ſecet Quadratricem. Manifeſtum eſt eum ita ſe habere, ad ipſam Quadratricem, vt ipſe totus intra Quadratricem, eius vero tangens tota extra Quadratricem cadat: alias enim aut ipſe, aut eius tangens arcum BD. ſecaret, ideoque ex prima parte huius, non eſſet tertio loco proportionalis. Dico eſſe vt DB. ad AD. ita AD. ad AE. Si enim non ſit eadem ratio DB. ad AD. quæ AD. ſcilicet AB. ad AE. erit vel maior vel minor: ſit primo maior; fiatque eadem, ac ſit vt DB. ad DA. ita AB. ad AI. erit AI. minor quam AE. (nam cum ſit vt DB. ad DA. id eſt ad AB. ita AB. ad AI. & maior ſit ratio DB. ad DA. quam AB. ad AE. ex hypotheſi, maior erit ratio AB. ad AI. quam AB. ad AE. ideoque minor eſt AI. quam AE.) ergo deſcriptus Quadrans AMI. cadit intra Quadrantem AGE. ſed Quadrans AGE. cadit intra Quadratricem DE. igitur

& Quadrans AMI. eiusque tangens IM. cadit intra Quadratricem, secatque suum quadrantem verbi gratia in O. & Quadratricem in N. ergo ex priori parte huius AI. non est tertio loco proportionalis. Quod est absurdum.

Sed ratio DB. ad DA. ponatur minor, quam DA. ad AE. fiantque eadem, ac sit vt DB. ad DA. id est, ad AB. ita AB. ad AP. erit AP. maior quam AE. (, nam cum sit vt DB. ad AB. ita AB. ad AP. minor autem sit ratio DB. ad AB. quam AB. ad AE. minor etiam erit ratio AB. ad AP. quam AB. ad AE. ideoque maior est AP. quam AE.) ergo descripti Quadrantis AQP. basis AP. cadet vltra punctum E. & vltra tangentem EL. secabit igitur arcus QP. tangentem EL. verbi gratia in R. ideoque cum tangens EL. cadat extra Quadratricem, etiam punctum R. cadet extra Quadratricem, ac proinde Quadrans AQP. secabit Quadratricem in S. Non igitur basis AP. est tertio loco proportionalis arcui DB. & semidiametro AD. ex prima parte huius. Erit igitur basis AE. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

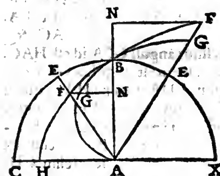
Ex dictis manifestum est Quadratricem non sua basi, quæ vere neque extat, neque extare potest, ad circuli tetragonismum conducere, sed suamet essentia; ad quam si habitudinem habeat Quadrans interior qualem modo diximus, ita vt eam neque sua peripheria, neque sua tangente secet, erit dicti Quadrantis basis arcui primarij Quadrantis, & semidiametro tertio loco proportionalis. Veteres tamen cum basim Quadratricis, motu, qui ad eam peruenire non potest, definierunt; repexisse videntur ad punctum quoddam in basi Quadrantis, ad quod linea motu progenita, seu potius punctum interfectionis motum continuo magi accedit, ac tandem propius quam ad aliud vllum punctum, quod in basi designari possit; ita vt si vel minimam molem haberent illa, tandem sese contingerent. Quo pacto, & nos tum in hac

hac linea; tum in aliis Quadratricibus, quas in demonstrationes adducemus, BASIS notionem assumemus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

Quadratrix spiralem tangit in puncto, vbi vtraque Quadrantem secat.

In semicirculo CBX. cuius centrum A. sint descriptæ spiralis ABG. & Quadratrix HBF. secantes semicirculum dictum in puncto B. a quo erectum est latus Quadrantis AB. vt patet ex earum descriptione. Dico quod quadratrix HBF. spiralem ABG. contingit in puncto B. Ducatur, AE. secans spiralem in G. & Quadratricem in F. Quadrantem in E. & FN. secet BA. perpendiculariter: Erit, ex descriptione spiralis, vt BA. id est, EA. ad AG. ita arcus Quadrantis BC. ad arcum EC. & vt BA. ad NA. ita idem Quadrantis arcus BC. ad arcum EC. ex descriptione Quadratricis; ergo vt BA. ad AG. ita BA. ad AN. æquales igitur sunt AG. AN. At vero in triangulo rectangulo FNA. basis FA. maior est quam latus NA. ergo FA. maior est quam GA. ideoque punctum F. cadit supra punctum G. Idemque in quolibet alio puncto Quadratricis demonstrabitur: Tota igitur Quadratrix cadit extra spiralem, ac cum ea in solo puncto B. concurrit. Quod erat demonstrandum.



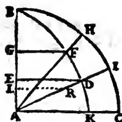
9. 5.
19. 1.

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

RAdius Quadratricis in Quadrante vicinior basi, remotiore minor est.

In Quadrante ABC. cuius basis AC. latus erectum AB. centrum A. sit Quadratrix BK. cuius basis AK. radij AD. AF. ille vicinior, hic remotior a basi AK. ac secantes Quadrantis arcum ille in I. hic in H. Dico radium AD. minorem esse radio AF. Si enim non sit minor, erit vel æqualis, vel maior. Sit primum æqualis: ac ductis FG. DE. ad AB. perpendicularibus in triangulis rectangulis AED. AGF. ponantur bases AD. AF. sinus toti, erit EA. sinus anguli EDA. id est IAC. & GA. sinus anguli GFA. id est HAC. maior autem est angulus GFA. quã angulus EDA. nempe HAC. quam IAC. igitur maior est ratio anguli GFA. ad angulum EDA. id est; HAC. ad IAC. id est, arcus HC. ad arcum IC. quam GA. ad EA. Rursus cum ex descriptione Quadratricis sit vt arcus CB. ad arcum CH. ita BA. ad AG. erit conuertendo, vt arcus CH. ad arcum CB. ita AG. ad AB. sed ex eadem descriptione, est vt arcus CB. ad arcum CI. ita AB. ad AE. ergo ex æquali, erit vt arcus HC. ad arcum IC. ita recta GA. ad rectam EA. Quod est absurdum; ostensa est enim ratio maior HC. ad IC. quam GA. ad EA. Sed AD. dicatur esse maior quam AF. abscindatur AR. æqualis ipsi AF. & ducatur RL. ad AB. perpendicularis, cadet punctum L. sub punctum E. maiorque erit EA. quam LA. Rursus autem, vt priori parte huius, ostendemus minorem esse rationem GA. ad LA. quam HC. ad IC. sed adhuc minor est ratio GA. ad EA. quam GA. ad LA. igitur minor est ratio GA. ad EA. quam HC. ad IC. est autem, & eadem ratio GA. ad AE. quæ arcus



Marginal notes: 19. 1. — Corol. 1. 28. 1. huius. — 33. 6. — 14. huius. — 8. 5.

arcus HC. ad arcum IC. vt prima parte huius probatum est. Quod est absurdum, non igitur AD. maior est quam AF. sed nec æqualis, igitur minor. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc colligitur basim Quadratricis esse omnium radiorum minimum; & reliquorum minores qui basi viciniores.

COROLLARIVM. II.

Rursus constat differentias radiorum Quadratricis, & & Quadrantis eo maiores esse, quo basi viciniores: vt DI. esse maiorem ipsa FH. inæquales enim AD. AF. illa minor, hæc maior ex æqualibus AI. AH. relinquunt inæquales DI. FH. illam maiorem hanc minorem. 15. defin. 5. pron.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

Sinus Quadratricis in Quadrante basi vicinior, remotiore maior est.

Sint eadem quæ superiori propositione. Dico sinum Quadratricis ED. qui vicinior est basi AIC. esse maiorem sinu GF. qui remotior est. Si enim non sit maior, sit æqualis, aut minor: ac sit primum æqualis; ponanturque sinus toti rectæ GF. ED. erit GA. tangens anguli GFA. id est, 29. 1. HAC. & EA. tangens anguli EDA. id est, IAC. & maior est angulus GFA. angulo EDA. id est HAC. ipso IAC. Igitur maior est ratio tangentis GA. ad tangentem EA. 26. primi huius. quam anguli GFA. ad angulum EDA. id est, quam anguli HAC. ad angulum IAC. id est, quam arcus HC. ad arcum IC. Sed etiam ex descriptione Quadratricis, & ex pro-

progressu superioris propositionis, est vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Quod est absurdum; probatum enim est esse maiorem rationem GA. ad EA. quam HC. ad IC. Sed dicatur esse minor ED qnam GF. erit ipsius tangens minor,
8. 5. quam cum ponitur æqualis ipsi GF. Igitur tunc multo maior erit ratio GA. ad EA. quam anguli GFA. ad angulum EDA. id est, quam HAC. ad IAC. id est, quam arcus HC. ad arcum IC. Quod est absurdum; cum ex progressu prioris propositionis, & prima parte huius, constet esse vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Non ergo ED. ipsi GF. æqualis est, aut minor; igitur maior. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Hinc constat basim Quadratricis esse omnium sinuum ipsius Quadratricis maximum; reliquorum eos esse maiores, qui illi propinquiores fuerint.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

Si recta ex puncto vbi Quadratrix Quadrantem secat ducta auferat ex basi Quadrantis producta rectam æqualem arcui Quadrantis; ea in dicto puncto tanget Quadratricem.

Sit Quadrans ABC. cuius basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix VB. secans arcum Quadrantis in B. puncto: a quo ducta BE. auferat ex basi AC. producta rectam AE. æqualem arcui Quadrantis CB. Dico quod recta EB. producta tangit Quadratricem in puncto B. sumantur duo quibet arcus æquales BK. BL. vltra citraque punctum B. per quos ducantur semidiametri AK. AL. secantes Quadratricem, illa in O. ista producta in R. a quibus punctis ducantur ON. RM. perpendiculares ad AB. productam,

ductam, seu parallelæ ad AC. secantes lineam BE. illa in I. ista in R. item sinus KD. arcus KB. & BS. tangens arcus

BL. Quoniam O. est punctum in Quadratrice, erit ex descriptione Quadratricis, vt arcus Quadrantis BC. ad arcum KC. ita BA. latus erectum ad AN. rectam, & per conuersionem rationis vt CB. ad BK. ita AB. ad BN. & cum in triangulis ABE. NBI. rectangulis ad N. & A. etiam communis sit angulus ad B. vt ideo æquiangula sint, erit vt BA. ad BN. ita AE. ad NI. ergo vt BC. ad BK. ita AE. ad NI. & permutando vt arcus BC. ad rectam AE. ita arcus BK. ad rectam NI. æquales autem ponuntur BC. & AE. æquales igitur erunt NI. & BK. Rursus cum DB. sit sinus versus arcus KB. maior erit ratio AB. ad BD. quam arcus CB. ad arcum BK. & vt arcus CB. ad arcum BK. ita AB. ad NB. ex descriptione Quadratricis, igitur maior est ratio AB. ad BD. quam AB. ad BN. minor igitur est BD. quam BN. quibus ablatis ex AB. maior est AD. quam AN. Igitur cum in triangulis æquiangulis ANO. ADK. (ob rectos ad N. D. & communem ad A.) sit vt AD. ad DK. ita AN. ad NO. maior autem sit AD. quam AN. maior erit KD. quam NO. cum ergo recta IN. ostensa sit æqualis arcui KB. arcus autem KB. maior sit sinu recto KD. & sinus KD. ostensus sit maior quam NO. erit NI. maior quam NO.

[Margin notes: 32. 1. / 4. 6. / lemm. 3. huius. / 14. huius. / 5. pron. / 14. 5.]

NO. Cum ergo punctum O. sit in Quadratrice, erit punctum I. extra Quadratricem; atque idem ostendetur in quolibet alio puncto Quadratricis intra Quadrantem.

24. huius. Insuper cum, ex descriptione Quadratricis, sit arcus CB. ad arcum CBL. vt recta AB. ad AM. erit vt CB. ad BL. ita AB. ad BM. sed vt CB. ad BL. ita CB. ad BK. (nam positi sunt æquales arcus BK. BL.) & vt CB. ad BK. ita ostensum est AB. ad BN. ergo est vt AB. ad BM. ita AB. ad

9. 5. BN. æquales igitur sunt BN. BM. Quare etiam æquales NI. MP. (nam in triangulis rectangulis BMP. BNI. cum æquales sint anguli recti ad M. N. & ad verticem B. & latera BN. BM. æqualia etiam erunt latera MP. NI.) sed

26. 1. recta NI. ostensa est æqualis arcui KB. id est BL. ergo etiam

Archimed. Sphera & Cylindro. MP. est æqualis arcui BL. qui minor est sua tangente BS. & tangens BS. minor quam MR. (vt enim AB. minor ad AM. maiorem, ita BS. minor ad MR. maiorem, in triangulis æquiangulis ABS. AMR. ob angulos rectos ad B. M. & communem ad A.) Quare etiam MP. minor est quam MR. caditque punctum P. inter M. & R. cumque R. sit in Quadratrice, erit punctum R. extra Quadratricem; atque idem ostendetur in quolibet alio puncto Quadratricis extra circulum: Igitur recta EBP. tota cadet extra Quadratricem, præterque in puncto B. illam igitur continget. Quod erat probandum.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI lineam Quadratricem recta contingat in puncto vbi circulum secat; anguli quos cum latere erecto Quadrantis facit linea contingens, inæquales sunt; & is quidem qui ad præcedentia constituitur est obtusus, qui ad sequentia acutus.

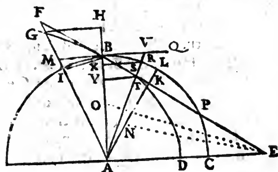
Sint

Sint omnia quæ superiori propositione, & recta EB. producta tangat Quadratricem in B. Dico angulum ABP. esse obtusum, atque ideo ABE. acutum. Nam vt MA. ad AB. ita RA. ad AS. maior autem est MA. quam AB. igitur maior RA. quam AS. Cadit igitur punctum S. infra R. intra Quadratricem, cum punctum R. sit in Quadratrice: sed adhuc punctum P. lineæ contingentis transit supra punctum R. cum sit extra Quadratricem, ergo multo magis punctum P. est supra punctum S. maior igitur est angulus ABP. angulo ABS. at ABS. rectus est, igitur ABP. obtusus est, ideoque ABE. acutus. Quod erat demonstrandum. 11. defin. 13. 1.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

SI Quadratricem recta linea contingat in puncto vbi circulum secat; ea coibit cum basi Quadrantis cui inscribitur: & pars dictæ basis inter centrum circuli, & contingentem erit æqualis arcui Quadrantis.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AE. latus erectum AB. in quo Quadratrix descripta DBG. cuius basis AD. quæ quidem extra Quadrantem producatur, eo modo quo decima quarta propositione huius demonstratum est, ita vt pars DB. intra pars BG. cadat extra Quadrantem, eumque secet in B. puncto in quo



Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE. coibit cum basi AC. producta verbi gratia in E. & quod recta AE. erit æqualis arcui Quadrantris BC. Primum euidens est, angulus enim BAE. rectus est ex suppositio-
12. huius. ne, & ABE. acutus ex demonstratis, coeunt igitur AE.
13. pron. & BE. Quoad secundum, si AE. non est æqualis arcui
4. prop. de Spir. Archim. BC. erit vel maior vel minor sit. Primum maior, & sumatur EN. minor quidem quam AE. maior vero quam peripheria BC. & arcus BP. diuidatur bifariam in L. du-
30. 3. 28. 3. ctaque AL. secet tangentem in K. ideoque eius partem BP.
3. 3. bifariam, quapropter & ad angulos rectos. Erit igitur vt
8. 6. BA. ad AE. ita BK. ad KA. sed BA. ad NE. minorem, ma-
8. 5. iorem habet rationem, quam BA. ad AE. maiorem. Igitur BA. ad NE. maiorem habet rationem quam BK. ad KA. Cum igitur circulus sit BC. & in eo recta BP. minor dia-
7. p. de Spiralib. Archim. metro, poterit duci recta AF. ad productam contingentem BF. ita vt pars eius FI. inter circumferentiam, & productam contingentem, ad lineam IB. iungentem terminos B. I. habeat proportionem, quam BA. ad NE. Cum igitur sit FI. ad IB. vt BA. ad NE. erit permutando vt FI. ad AB.
8. 5. id est AI. ita IB. ad NE. sed recta IB. ad NE. minorem habet rationem quam arcus IB. ad arcum BC. (est enim VB. arcus maior quam subtensa IB. & arcus BC. ex suppositione minor quam EN.) ergo FI. ad AI. minorem habet rationem, quam arcus IB. ad arcum BC. & componendo minorem habet rationem FA. ad AI. quam arcus IBC.
14. huius. ad arcum BC. sed vt arcus IBC. ad arcum BC. ita ex descriptione Quadratricis HA. ad AB. id est GA. ad AM. ergo minorem habet rationem FA. ad AI. quam GA. ad (ducta BM. tangente ex B. in M.) AM. Quod est absurdum, cum FA. sit maior quam GA. (cadit enim F. extra Quadratricem, ex suppositione, cum FE. tangat Quadratricem tantum in B. & G. est in Quadratrice) & AI. minor quam AM.

BC.

Sed sit si fieri potest AE. minor quam circumferentia BC. & sumatur recta EO. maior quidem quam EA. minor vero quam arcus BC. & a puncto B. ducatur BQ. æquidistans ipsi AE. Rursus quia in circulo BC. sumpta est BP. diametro minor, tangatque BQ. circulum in B. & minor sit ratio BA. ad EO. quam BK. ad KA. (est enim vt BA. ad AE. ita BK. ad KA. & BA. ad AE. minorem quantitatem maior est ratio, quam BA. ad EO. quæ maior posita est) potest igitur à centro A. duci quæpiam recta AV. ad BQ. tangentem circuli, ita vt SR. inter circulum BC. & ductam FBE. intercepta ad lineam BV. partem contingentis, inter ductam & contactum, habeat eandem rationem quam BA. ad EO. Secet autem eadem ducta Quadratricem in T. tangentem Quadratricis in S. & circulum in R. tangentem circuli in V. Quoniam igitur est vt SR. ad BV. ita BA. ad EO. erit permutando vt SR. ad AB. id est ad AR. ita BV. ad EO. sed BV. ad EO. maior est proportio quam arcus BR. ad arcum BC. (nam tangens BV. est maior arcu BR. & EO. minor arcu BC. ex hypothesi) igitur maior erit ratio SR. ad AR. quam BR. ad BC. sed est, ex descriptione Quadratricis, vt BR. ad BC. ita BY. (ducta TY. perpendiculari ad AB. ex T. puncto Quadratricis) ad BA. Igitur maior est ratio SR. ad AR. quam BY. ad AB. sed BY. ad AB. maior est ratio quam XY. ad XA. (ducto sinu RX. arcus BR.) id est quam RT. ad RA. igitur maior est ratio SR. ad RA. quam RT. ad RA. maior ergo est SR. quam RT. Quod est absurdum cum sit minor. Nam S. est in linea tangente, quæ vicinior peripheriæ existit, quam Quadrarricis punctum T. Cum igitur AE. neque maior, neque minor sit quam arcus BC. æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

4. prop. de Spiral. Archimedis.

8. 6.

8. 5.

8. prop. Spiral. Archimedis.

14. huius.

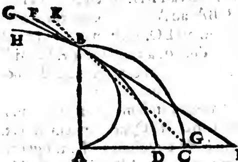
10. 5.

THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

PRopositum sit idem aliter demonstrare.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix eũ secet in B. puncto in quo eandem Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE secans AE. basim Quadratricis in E. abscindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC. Inscribatur eidem Quadranti spiralis ABH. quæ, vt patet ex descri-



18. huius. ptione, transibit per B. in quo puncto Quadratrix spiralem contingit. Cum igitur, ex hypothesi recta FBE. Quadratricem contingat in B. tota, puncto B. excepto, cadet extra Quadratricem; & quia Quadratrix spiralem tangit in B. tota extra eam cadit, ac solo puncto B. concurrit: Igitur etiam recta FE. tota extra spiralem cadit, nec nisi puncto B. cum ea congruit: tangit igitur FE. spiralem in B. Manifestum igitur est ex 20. propositione spiralium Archime- (20. Spiral. Archimedis.) dis, quod recta AE. arcui BC. æqualis existit. Quod erat.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

EIusdem propositionis alia demonstratio.

Sit rursus Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix DBG. eum secet in B. puncto, in quo eandem Quadratricem tangat. Dico quod recta FBE. secans AE. basim Quadratricis producta m

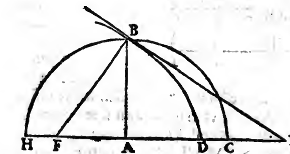
ctam

ctam in E. abscindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC. Si enim AE. non sit æqualis arcui Quadrantis, sit eidem æqualis AG. & ducatur GBK. item spirales ABH. patet ex 21. huius quod KBG. tangit Quadratricem in B. 21. huius. sed & ponitur FBE. tangere eandem Quadratricem in B. duæ igitur KBG. FBE. Quadratricem tangunt, igitur vtraque extra Quadratricem cadit, ac in solo puncto B. conuenit; sed & Quadratrix spiralem tangit in B. igitur tota, puncto B. excepto, extra eam cadit, ergo vtraque recta FBE. KBG. extra spiralem cadit, solo puncto B. conuenit, ideoque illam contingit in B. Quod est absurdum, non enim duæ rectæ spiralem in eodem puncto contingunt. Ergo recta AE. est æqualis arcui Quadrantis BC. Quod erat demonstrandum. 8. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

SI perpendicularis ad tangentem Quadratricis ex puncto contactus ducta basim Quadrantis productam secet: erit pars dictæ basis inter centrum Quadrantis, & ductam, æqualis basi Quadratricis.

Sit circulus HBC. cuius centrum A. diamter HC. latus erectum AB. diuidens arcum HBC. in duos Quadrantes *HB. BC.* ac illius quidem basis sit HA. istius autem itidem basis



Quadrantis AC. Quadratrix GBD. cuius basis AD. secans

ſecans circulum in B. Tangens Quadratricis in puncto B. ſit BE. ſecans baſim AC. productam in E. & ex *B.* ad *B*E. ducatur perpendicularis *B*E. ſecans baſim AC. productam
13. Pronun. in F. (ſecabit autem cum angulus *B*EF. ſit acutus,& F*B*E. rectus.) Dico rectam AF. eſſe æqualem AD. baſi Quadratricis. Conſtat enim ex Pappo lib. 4. p. 16. & Clauio p. 4. de Quadratrice,baſim Quadratricis eſſe tertio loco proportionalem arcui Quadrantis ,& ipſius ſemidiametro nimium vt *B*C.ad *B*A.ita *B*A.ad AD. Cum autem rectangulum ad *B*.ſit triangulum F*B*E.& in baſim FE. demiſſa per-
8. 6. pendicularis *B*A.erit vt EA.ad A*B*. ita A*B*.ad AF. at vero
23. 24. 25. huius. EA. eſt æqualis arcui Quadrantis, vt igitur *B*C. ad *B*A.ita
11. 5. *B*A. ad AF. ergo vt *B*A.ad AD.ita *B*A.ad AF.quare æqua-
9. 5. les ſunt AD. AF. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA II. PROPOS. XXVII.

QVadratricem differentialem delineare.

Sit ſemicirculus C*B*D.cuius centrum A. diameter CD. perpendicularis A*B*. quæ cum diuidat in duos Quadrantes , quorum latus erectũ commune A*B*. baſes AC. AD. Conuertatur recta CA. circa verticem ſint punctũ immobile C. ita vt in toto motu ſecet latus erectum A*B*. aſcendendo per G.F.E. *B*. moueatur item AD. ita vt in toto motu ſecet perpendiculariter idem latus erectum A*B*. & arcum Quadrantis D*B*. aſcendendo in KN. IM. HL. &c. Ita autem fiat geminus ille motus, vt quæ ratio lateris erecti *B*A. ad partem

tem abscissam GA. a recta CG. eadem sit arcus Quadratis BD. ad arcum sectum DN. Item in illis motibus productæ CG. CF. CE. occurrant perpendicularibus, seu finibus (qui arcus proportionales abscindunt ex arcu Quadrantis) in punctis Q. P. O. punctum concursus describet vestigio suo lineam curuam RQPOB. extra Quadrantem ABC. Et quidem quod concurrant lineæ CQ. KN. patet, quia cum angulus CAG. sit rectus, erit CGA. acutus, ideoque & æqualis ad verticem KGQ. acutus erit, est autem GKQ. rectus, concurrent igitur KQ. GQ. Quod vero concurrant vltra Quadrantem ABC. ita probatur. Quoniam peripheria Quadrantis BD. & latus erectum AB. similiter diuiduntur, perpendicularis NK. auferet ex latere recto rectam KB. minorem ipsa GB. punctum igitur G. cadet sub punctum K. ideoque recta CG. producta occurret ipsi NK. vltra AB. in puncto Q. Hanc autem lineam Quadratricem Differentialem vocamus, eo quod eius basis, vt postea ostendemus, sit differentia arcus Quadrantis, & eius semidiametri.

13. 1.
13. prop.
Lemm. 4. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVIII.

Sinus Quadratricis differentialis basi vicinior remotiore maior est.

In figura superiori, Quadratricis BPR. sint sinus KQ. IP. ille basi vicinior, hic remotior. Dico KQ. esse maiorem quam IP. Quoniam, ex descriptione, est vt arcus BD. ad arcum MD. ita BA. ad AF. erit conuertendo vt arcus MD. ad arcum BD. ita AF. ad AB. sed vt BD. arcus ad arcum DN. ita, ex descriptione, BA. ad AG. ergo ex æqualitate est vt arcus MD. ad arcum ND. ita AF. ad AG. sed maior est ratio MD. ad ND. quam IA. ad KA. (sunt enim IA. KA. sinus recti arcuum MD. ND.) Igitur maior est ratio AF. ad AG. quam IA. ad KA. & permutando,

27. huius.
Corol. 1. 28. 1. huius.

conuertendo, ac diuidendo minor ratio IF. ad FA. quam
4. 6. KG. ad GA. Vt autem IF. ad FA. ita IP. ad CA. (æqui-
32. 1. angula enim sunt triangula CAF. PIF. ob rectos ad A. I.
15. 1. & æquales ad verticem F.) & vt KG. ad GA. ita KQ. ad
CA. (æquiangula enim sunt, ob eandem causam, trian-
gula CAG. QKG.) ergo minor est ratio IP. ad CA. quam
10. 5. KQ. ad CA. minor igitur est IP. quam KQ. Quod erat de-
monstrandum.

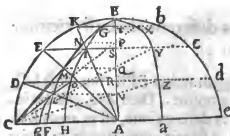
COROLLARIVM.

Hinc apparet basim Quadratricis differentialis esse omnium ipsius sinuum, maximum: reliquorum maiores qui ei propinquiores fuerint.

PROBLEMA III. PROPOS. XXIX.

Qvadratricem Arithmeticam describere.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. in quo Quadratrix prima seu Geometrica BNF. Iam vero proposita linea motu triũ rectarum perficietur. Primo circa centrum A. tanquam cardinẽ moueatur semidiameter AC. ita vt continuo Quadratricem secet in varijs punctis L. M. N. &c. & eius extremitas C. Quadrantem CB. percurrat, per puncta D. E. K. B. &c. per quæ ductæ perpendiculares ad AB. nempe DR. ES. KT. quæ sunt sinus complementorum arcuum DC. EC. KC. etiam continuo cum dictis punctis moueantur; denique recta CA. circa verticem C. punctum, in quo basis & arcus Quadrantis coeunt,



mo-

moueatur sursum simul cum punctis, in quibus semidiameter AC. AD. AE. Quadratricem primariam secat, & occurrat perpendicularibus, seu sinibus in punctis O.I.G. describet punctum illud concursus lineam curuam HGB. quam Quadratricem differentialem libet nuncupare, eo quod eius basis, vt postea ostendemus, arcui Quadrantis, & eius semidiametro sit tertio loco Arithmetice proportionalis.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

Differentiæ sinuum Quadrantis, & Quadratricis Arithmeticæ sunt æquales sinibus Quadratricis differentialis.

Sit in superiori schemate semicirculus C*B*Q. cuius centrum A. quem diuidat latus A*B*. erectum super basim CQ. in duos Quadrantes A*B*C. A*B*Q. ac in primo sint duæ Quadratrices, altera Geometrica *B*F. altera Arithmetica *B*H. Ducatur semidiameter AD. secans Quadratricem primam in L. & circulum in D. hinc perpendicularis DRd. secans latus A*B*. in R. & alterum Quadrantem in d. cui occurrat CL. recta in O. erit O. punctum Quadratricis Arithmeticæ. Rursum ex L. ducatur ad A*B*. perpendicularis LV. erit vt *B*A. ad AV. ita arcus *B*C. ad arcum CD. seu arcus *B*Q. ad arcum dc. Quare si connectatur CV. & producatur dum secet Dd. in Z. erit Z. punctum Quadratricis differentialis, atque ideo erit DR. sinus arcus D*B*. in Quadrante C*B*. & OR. sinus in Quadratrice Arithmetica *B*H. recta vero OD. differentia sinuum DR. OR. denique RZ. erit sinus in Quadratrice differentiali *B*XYZ. descripta per puncta aZYX. modo 27. huius explicato. Dico RZ. rectam, esse rectæ DO. æqualem Quoniam parallelæ sunt DO. CA. erunt in triangulis DLO. ALC. anguli D. O. angulis A. C. & anguli ad verticem L. æquales, æquiangula igitur sunt

29. huius.
14. huius.
27. huius.
27. huius.
29. 1.

4. 6. dicta triangula, quare vt CA. ad OD. ita AL. ad DL. sed
2. 6. vt AL. ad DL. ita in triangulo ADR. (in quo positæ sunt
4. 6. DR. LV. parallelæ) AV. ad VR. & vt AV. ad VR. ita CA. ad RZ. (æquiangula enim sunt triangula CAV. ZRV. ob eandem rationem, qua diximus esse æquiangula
11. 5. CLA. OLD.) ergo vt CA. ad OD. ita CA. ad RZ. æqua-
9. 5. les igitur sunt OD. RZ. Eodemque modo ostendemus SY. esse æqualem ipsi EZ. atque ita in reliquis. Quod fuit probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc euidenter deducitur differentias sinuum Quadrantis, & Quadratricis differentialis esse æquales sinibus Quadratricis Arithmeticæ; nimirum rectam Zd. differentiam sinus Rd. in Quadrante, & sinus RZ. in Quadratrice differentiali, esse æqualem sinui RO. Quadratricis Arithmeticæ BH. æquales enim sunt DR. Rd. igitur ablatis RZ. & DO. quæ modo ostensa sunt æquales, supersunt ZD. OR. inter se æquales.

COROLLARIVM. II.

Ex dictis etiam colligitur ratio qua altera posteriorum Quadratricum ex altera describatur. Si enim recta Ce. sursum ita moueatur continuo ad AB. perpendicularis vt rectis Aa. RZ. ST. TX. interceptis inter latus erectum, & Quadratricem differentialem Ba. æquales sint CH. DO. EL. KG. ab arcu Quadrantis, describetur Quadratrix Arithmetica HB. Et contra si eadem Ce. modo dicto ita moueatur vt rectis CH. DO. EL. KG. æquales sint Aa. RZ. ST. TX. delineabitur Quadratrix differentialis Ba.

COROL-

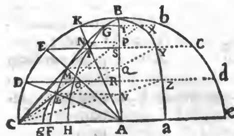
COROLLARIVM III.

DEnique etiam ex demonstratis deduci posset, tam figuram ABa. latere erecto AB. linea curua BZa. & basi Aa. contentam esse aequalem figurae HBC. contentae linea curua HB. arcu Quadrantis BC. & recta CH. quam figuram AB Q. figurae HBA. eo quod lineae Aa. RZ. SY. TX. lineis HC. OD. IE. GK. item rectae ae. Zd. Yc. Xb. rectis HA. OR. IS. GT. aequales sint; ideoque trapezia ab iis constituta qualibet aequalia sint, eadem ratione qua prop. 18. superioris libri probata est, ex polygonis in circulo, atque elipsi analogis, ipsorum circulorum, atque ellipsium analogia, atque aequalitas. Vnde etiam sequeretur figuram HBa. Quadranti esse aequalem. Sed volumus haec tantum innuisse, vt ea, si libuerit, demonstret cui amplius quam nobis otii fuerit.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXI.

BAsis Quadratricis differentialis est æqualis excessui, quo arcus Quadrantis in quo describitur, sua semidiametro maior est.

Sint eadem omnia quæ duabus superioribus propositionibus. Dico basim Aa. seu CH. Quadratricis differentialis *Ba.* esse æqualem excessui, quo arcus Quadrãtis *BC.* suam semidiametrum A*B.* superat; seu rectam Ca. esse æqualem arcui Quadrantis *BC.* Est enim vt AC. ad HC. id est ad Aa. illi æqualem, ita AF. ad FC. (vt paulo post ostendemus) & componendo, & per conuersionem 30. huius. 30. husui.



Pappus lib. 4. prop. 16. & Clauius p. 4. de Quadratricis. sionem rationis, est aC. ad CA. vt CA. ad AF. sed vt CA. semidiameter Quadrantis ad AF. basim Quadratricis ita arcus Quadrantis *B*C. ad semidiametrum CA. igitur vt aC. ad CA. ita arcus Quadrantis *B*C. ad eandem CA. æ-
9. 5. quales igitur sunt recta aC. & arcus Quadrantis *B*C. est autem Aa. excessus quo Ca. id est arcus Quadrantis superat semidiametrum CA. Quare patet id quod propositum est.

Quod autem sit vt AC.a d HC. ita AF. ad FC. ita demonstratur. Si non sit eadem ratio AC. ad HC. quæ AF. ad FC. erit vel minor, vel maior. Sit primo minor: ideoque fiat vt AF. ad FC. ita AC. ad quampiam minorem ip-
28. huius. sa CH. verbi gratia ad DO. (est enim maior quolibet sinu sequente DO.FI. KG.)erit igitur vt AF.ad FC.ita AC.ad
4. 6. DO. sed vt AC. ad DO. ita AL. ad LD. (æquiangula e-
15. 1. nim sunt triangula CAL. ODL. ob angulos æquales ad
29. 1. verticem L. & alternos ad D. A. & O. C. inter parallelas
Corol. 1. DO. CA. ideoque vt CA. ad OD. ita AL. ad DL.) est
19. huius. igitur vt AF.ad FC.ita AL.ad LD.sed AL.maior est quam
Corol. 2. 19. huius. AF. & DL. minor quam CF. maior igitur est ratio AL. ad LD. quam AF. ad FC. sed & probata est æqualis. Quod est absurdum; Non igitur minor est ratio AC. ad HC. quã AF. ad FC. Sed dicatur esse maior. erit ergo AF. ad FC. minor ratio, quam AC. ad CH. Fiat igitur vt AC. ad CH. ita recta quæpiam Ag. maior quam AF. ad gC. (si enim diuidatur AC. ea proportione quæ est AC. ad CH. in g. puncto, cum maior sit ratio AC. ad CH.quam AF.ad FC. erit maior ratio Ag. ad gC. quam AF. ad FC. cadet igitur punctum g. inter F. & C.si enim caderet in ipsum punctum F. esset vt AF. ad FC. ita AG. ad GC. quod est absurdum, & contra hypothesin: si inter puncta F. *A*. esset minor ratio *A*g. ad GC. quam *A*F. ad FC. quod etiam est absurdum) & centro *A*. distantia *A*g. describatur arcus Lg. secans Quadratricem in L. (secabit autem, cum continuo
19. huius. Quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare si non

secaret

fecaret esset *A*g maior semidiametro, quod est absurdum, cum secta sit semidiameter *A*C. in puncto g.) Quoniam æquales sunt *A*g. *A*L. item *A*D. *A*C. à centro ad circumferentiam, erit vt *A*g. ad gC. ita *A*L. ad LD. sed vt *A*g. ad gC. ita *A*C. ad CH. ex hypothesi, ergo vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad CH. sed vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad DO. (vt superius probatum est, ex similitudiue triangulorum C*A*L. ODL.) ergo vt *A*C. ad CH. ita *A*C. ad DO. æquales igitur sunt HC. & DO. Quod est absurdum: maior enim est HC. id est *A*a. quam DO. id est quam RZ. Igitur cum *A*C. ad CH. non sit aut minor, aut maior ratio quam *A*F. ad FC. erit eadem. Ideoque Basis Quadratricis differentialis &c. Quod probare oportebat.

15. defin.
9. 5.
28. huius.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXII.

Basis Quadratricis Arithmeticæ, semidiameter Quadrantis in quo describitur, & arcus eiusdem Quadrantis sunt in medietate Arithmetica; quorum differentia est basis Quadratricis differentialis.

In eadem figura superioris propositionis Basis *A*H. Quadratricis *A*ritmeticæ *B*H. differt à semidiametro Quadrantis C*A*. recta HC. quæ æqualis est rectæ *A*a. basi Quadratricis differentialis *B*a. & semidiameter Quadrantis C*A*. differt à recta Ca. quæ est æqualis arcui Quadrantis *B*C. differentia rectæ Aa. quæ est basis Quadratricis differentialis *B*a. Quare euidenter probatum est quod proponebatur.

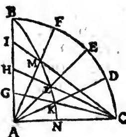
30. huius.
31. huius.

PROBLEMA IV. PROPOS. XXXIII.

Quadratricem quartam, seu diuisiuam describere.

Sit

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. circa centrum A. immotum moueatur sursum semidiameter AC. secans continuo arcum Quadrantis CB. & circa punctum C. tanquam cardinem fixum moueatur sursum recta CA. ita vt continuo secet latus erectum AB. ea ratione qua AB. secat arcum Quadrantis, & punctum intersectionis duarum linearum AC. CA. describat lineam curuam NKLMB. Hanc libet Quadratricem quartam, seu diuisiuam ἀντονομαστικῶς nuncupare, eo quod non tantum quadrando lineariter circulo, sed facile præ cæteris diuidendo, accommodata sit.



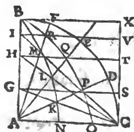
COROLLARIVM

Manifestum est ex descriptione esse vt BC. ad CD. ita BA. ad AG. cum in easdem rationes BC. & BA. a lineis sursum motis AD. & CG. diuidantur.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

Radij Quadratricis quartæ a basi remotiores vicinioribus sunt maiores.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. & in eo quadratrix quarta BN. modo & notis superioris propositionis descripta, cui accedat Quadratrix prima seu Geometrica BO. cuius basis AO. quas secent semidiametri AD. AE. AF. illam in pun-



punctis K. L. M. istam in punctis P. Q. R. manifestum est quod CG. CH. CI. & perpendiculares PG. QH. RI. ex punctis vbi prima Quadratrix secatur à semidiametris AD. AE. AF. cadent in eadem puncta G. H. I. cum tam lineæ CG. CH. CI. quam perpendiculares PG. QH. RI. diuidant rectam AB. eadem ratione qua diuisus est arcus Quadrantis in punctis D. E. F. perficiatur Quadratum ACXB. circa Quadrantem, & producantur perpendiculares GP. HQ. IR. in S. T. V. puncta lateris erecti Quadrati CX. Dico radium AL. radio AK. esse maiorem. Nam cum æquiangula sint triangula CAK. GPK. ob æquales ad 15. 1.
verticem K. & alternos CAK. GPK. inter parallelas AC. 29. 1.
GP. erit vt CA. ad AK. ita GP. ad PK. & permutando vt 4. 6.
CA. id est SG. ad GP. ita AK. ad PK. & conuertendo sit GP. ad SG. ita PK. ad KA. & componendo vt GP. cum SG. ad SG. ita PA. ad AK. eodem modo ostendemus esse, vt HQ. cum HT. ad HT. ita QA. ad AL. Cum autem ma- 20. huius.
ior sit GP. quam HQ. maior erit GP. cum SG. quam HQ. 4. pronunc.
cum HT. quæ ipsi SG. est æqualis. Igitur maior est ratio 8. 5.
compositæ GP. cum SG. ad SG. quam compositæ HQ. cum HT. ad HT. Quare maior est ratio PA. ad AK. quam QA. ad AL. minor autem est PA. quam QA. igitur minor 19. huius.
est AK. quam AL. (nam si æquales erant PA. QA. cum PA. maiorem habeat rationem ad AK. quam QA. ad AL. minor esset AK. quam AL. multo magis sequitur PA. exi- 10. 5.
stente minore quam QA. ipsam AK. esse minorem quam AL.) Atque eodem modo ostendemus AL. esse minorem quam AM. Igitur radij Quadratricis, &c. Quod fuit probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc colligitur basim quartæ Quadratricis esse minimum omnium radiorum.

COROLLARIVM. II.

4. 6. *EX dictis etiam apparet KC. esse minorem quam LC. & LC. quod CM. nam vt PA. ad AK. ita GC. ad CK. sed PA. ad AK. maior est ratio quam QA. ad AL. vt in propositione ostensum est; maior ergo ratio est GC. ad CK. quam QA.*
4. 6. *ad AL. sed vt QA. ad AL. ita HC. ad CL. maior igitur est ratio GC. ad CK. quam HC. ad CL. minor autem est GC. quam*
19. 1. *HC. (subtendit enim GC. angulum acutum GHC. & HC. angulum obtusum HGC. in triangulo HGC.) Igitur ob rationem allatam in fine propositionis KC. minor est quam LC.*

COROLLARIVM III.

DEnique sequitur manifestè, complementa semidiametri inter Quadratricem diuisiuam & Quadrantem, videlicet NC. KD. LE. MF. ordine decrescere ita vt maxima sit NC. ea minor KD. & ipsa KD. minor LE. & sic deinceps, si enim ex æqualibus AC. AD. AE. AF. demantur inæquales, ex prioribus minores AN. AK. AL. AM. vt patet ex
5. pron. *propositione, remanent inæquales NC. KD. LE. MF. prima maior quam secunda, secunda quam tertia; atque ita in reliquis.*

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

BAsis Quadratricis diuisiuæ diuidit semidiametrum Quadrantis in quo describitur, in ratione semidiametri ad arcum Quadrantis.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. & in eo Quadratrix diuisiua seu quarta BN.

BN. cuius basis NA. Dico quod basis NA. diuidit semidiametrum AC. in ratione Semidiametri AC. ad arcum Quadrantis BC. seu esse vt AC. ad CB. ita NA. ad NC. Continuetur Quadrans CB. in I. & sit CBI. semicirculus, & ABI. Quadrans in quo Quadratrix differentialis seu secunda BEH. cuius basis AH. & in priori Quadrante sit prima Quadratrix BO. Erit vt HC. ad CA. ita CN. ad NA. vt mox probabimus, sed HC. est æqualis arcui Quadrantis BC. (Nam cum AH. sit 32. huius. excessus quo arcus BC superat semidiametrum AC. erit tota HC. æqualis arcui BC.) ergo vt arcus Quadrantis BC. ad semidiametrum AC. ita CN. ad NA Quod vero sit vt HC. ad AC. ita NC. ad AN. ita probatur. Si enim contrarium asseratur, maior erit, aut minor proportio HC. ad AC. quam NC. ad NA. Sit primum maior. Quoniam maior est proportio HC. ad CA. quam NC. ad NA. erit conuertendo minor ratio CH. ad HC. quam NA. ad NC. quare erit eadem ad minorem aliquam ipsa CH. verbi gratia ad DE. parallelam basi AC. & interceptam inter arcum Quadrantis, & lineam quadratricis differentialis, quæ minor est quam CH. (nam DF. sinus arcus DB. est minor sinu toto AC. est FE. minor quam AH. ideoque tota DE. tota CH. Corol. 29. huius. minor est.) ductisque AD. CE. rectis i quæ transibunt per idem punctum huius Quadratricis K. vt patet ex descriptione harum linearum 28. & 34. huius atque adeo sit vt AC. ad DE. ita NA. ad NC. Sed vt CA. ad DE. ita AK. ad KD. (ob similitudinem triangulorum CAK. HDK.) ergo vt AN. ad NC. ita AK. ad KD. Sed AK. maior est Corol. 1.35 quam AN. & KD. minor quam NC. ergo maior est ratio huius. AK. ad KD. quam AN. ad NC. sed est etiam eadem. Corol. 3.35 huius. Quod est absurdum.

Sed dicatur ratio HC. ad CA. minor ratione CN. ad NA. erit igitur minor ratio NA. ad CN. quam CA. ad HC. fiatque vt CA. ad HC. ita AV. ad VC. erit AV. maior quam AN. (sit enim esset æqualis remaneret minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC, si minor, minor esset ratio AV. ad VC. quam AN. ad NC. sed ponitur etiam minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC. igitur minor esset ratio AV. ad VC. quam CA. ad HC. quod est contra hypothesin) ex distantia AV. describatur arcus VK. secans Quadratricem diuisiuam in K. (secabit autem, cum continuo huius quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare si non secaret esset AV. maior semidiametro quod est absurdum cum secta ponatur semidiameter AC. in V. puncto ea ratione, quæ est CA. ad HC.) Quoniam æquales sunt AV, AK. item AC. AD. à centro ad suas circonferentias erit vt AV. ad VC. ita AK. ad KD. sed vt AV. ad VC. ita ex hypothesi CA. ad CH. ergo vt AK. ad KD. ita CA. ad CH. sed est etiã vt AK. ad KD. ita CA. ad DE. (ob similitudinem triangulorum CAK. EDK.) est ergo vt CA. ad CH. ita CA. ad DE. æquales igitur sunt CH. DE. Quod est absurdum, maior enim est DE. sinus totus sinu partiali DF. & AH. basis Quadratricis sinu FE. igitur tota CH. tota DE. maior est. Non igitur ratio HC. ad CE. minor est ratione CN. ad NA. sed nec maior, igitur æqualis ergo basis Quadratricis diuisiuæ &c. Quod erat &c.

35. huius.

9. 5.

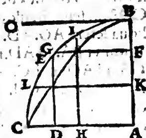
Corol. 29. huius.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXVI.

HActenus nonnullas lineas protulimus, quæ sua potissimum basi, tetragonismo; ipsa vero periocha, diuisioni circuli operam suam conferunt. Ad vltimum autem hoc munus multas alias excogitauimus; quarum tamen

men vnam tantum, aut alteram proferemus; ad quarum imitationem, atque exemplum aliæ innumeræ poterunt conformari.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. basis AC. latus erectum AB. tangens eiusdem in puncto B. quælibet recta BO. moueatur latus erectum AB. ex A. versus C. ita vt sit continuo basi AC. perpendicularis; moueatur item tangens BO. deorsum versus A. ita vt sit in toto motu lateri erecto AB. perpendicularis: & qua ratione AB. secat AC. eadem BO. secet arcum Quadrantis BC. nempe cum AB. peruenerit in DE. tangens BO. peruenerit in FG. sitque vt CA. ad AD. ita CB. ad BG. atque ita deinceps, cum AC, fuerit in HI, sit BO. in KL. sitque vt CA. ad AH. ita CB. ad BL. secent autem sese dictæ rectæ in puncto, quod in toto motu sui vestigium relinquat (verbi gratia in B. M. N. C.) describetur linea curua BMNC.



PROBLEMA VI. PROPOS. XXXVII.

QVadrantem ita secare vt ducta perpendicularis ad basim arcum Quadrantis, & basim alternatim in eandem rationem diuidat.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. basis AC. spiralis Quadrantis ADB. quam secet in D. semicirculus CDA. centro E. (quod basim AC. bifariam diuidit) descriptus, & ducantur recta CD. & ADH. in peripheria Quadrantis H. tandemque ex H. recta HO.

per-

perpendicularis ad basim CA. Dico esse vt CH. ad HB. ita AO. ad OC. Est enim, ex difinitione spiralis, vt BA. ad AD. ita BC. ad CH. ipsi autem AD. est æqualis AO. (Nam triangula HOA. CDA. habentia angulum communem ad A. & æquales rectos HOA. ex descriptione, &
26. 1. CDA. in semicirculo; & bases AC. AH. æquales, etiam reliqua latera AO. AD. item HO. CD. æqualia habent.)
7. 5. Igitur vt BA. ad AD. ita BA. id est CA. ad AO. ideoque vt CA. ad AO. ita BC. ad CH. & diuidendo & conuertendo AO. ad OC. vt CH. ad HB. Igitur Quadrantem ita secuimus. Quod facere oportebat. Quadrantis autem nomine tum in hoc tum in sequentibus problematis ipsum arcum Quadrantis nuncupabimus, ne cum cum arcu partiali confundamus.

B H D E C O A

COROLLARIVM.

Hinc efficitur posse secari Quadrantem ducta perpendiculari ad basim, ita vt quæ ratio Quadrantis ad arcum ea sit sinus totius ad sinum rectum complementi; & sinus totius ad sinum versum complementi, & quæ ratio sinus recti ad sinum versum ea sit arcus respondentis sinui verso ad arcum respondentem sinui recto. Est enim in vltima figura vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HC. ita sinus totus AC. ad sinum complementi OA. & vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HB. ita sinus totus AC. ad sinum versum complementi CO. denique CH. arcus ad arcum HB. est vt sinus rectus AO. ad sinum versum OC. Ex quibus etiam sequitur posse dicta perpendiculari secari Quadrantem, ita vt sint eius partes in ea ratione alternatim in qua sunt variæ lineæ, quæ habent eandem proportionem, quam aut sinus totus ad sinum rectum, aut idem ad sinum versum,

versum, aut sinus rectus ad sinum versum: Cuiusmodi quamplurima occurrunt apud eos qui de sinibus, tangentibus, secantibus, ac chordis scripserunt, ad quos lectorem remittimus.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXXVIII.

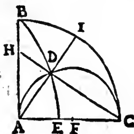
QVadrantem ita diuidere, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, eadem sit sinus arcus ad sinum complementi.

Describatur intra Quadrantem ABC. quadratrix diuisiua seu quarta BDE. & diuisa basi quadrantis bifariam in F. centro F. semidiametro FC. describatur semicirculus CDA. secans quartam Quadratricem in D. per quod transeat semidiameter ADI. occurrens Quadrãti in I. & recta CDH. occurens lateri erecto in H. Cum angulus CDA. in semicirculo sit rectus erit CD. sinus rectus arcus CI. & DA. sinus rectus complementi, seu arcus IB. Dico esse Quadrantem BC. ad arcum IC. vt est sinus rectus CD. arcus IC. ad DA. sinum complementi, seu arcus IB. Quoniam BDE. est Quadratrix diuisiua erit vt BC. ad CI. ita BA. id est CA. ad AH. id est CD. ad DA. Ergo Quadrantem ita diuisimus &c. Quod erat faciendum.

33. huius.

31. 3.

33. huius. 8. 6.



COROLLARIVM.

EX hoc Problemate colligitur posse diuidi Quadrantem ea ratione quam habent varia quantitates eandem cum ratione sinus recti & sinus complementi, ac inter ceteras

ras

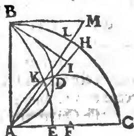
ras eas, vt sit eadem proportio Quadrantis ad arcum quæ sinus totius ad tangentem complementi.

3. 6. *Est enim vt CD. ad DA. id est vt BC. ad CI. ita CA. sinus totus ad AH. tangentem anguli ACH. qui est complementum anguli DAC. scilicet arcus IC.*

PROBLEMA VIII. PROPOS. XXXIX.

QVadrantem ita secare vt duorum arcuum, quæ ratio prioris ad posteriorem eadem sit sinus complementi prioris ad tangentem complementi posterioris.

1. defin. huius. 33. huius. SIT Quadrans sæpe dictus intra quem descriptæ sint duæ lineæ BDA. spiralis & BKE. quarta Quadratrix; & diuisa basi AC. bifariam in F. describatur centro F. semicirculus ADC. distantia FC. secans spiralem in D. Quadratricem quartam in K. & ducantur semidiametri ADH. AKL. Secantes Quadrantem in H. L. & arcus BH. sinus rectus sit BI. & arcus BL. tangens BM. Dico esse vt arcum HC. ad arcum LC. ita BI. sinum complementi HC. ad BM. tangentem complementi arcus BL. Cum enim sit vt BC. ad HC. ita AB. ad BI. vt patet ex progres-



37. huius. su 37. huius erit conuertendo vt HC. ad BC. ita BI. ad AB. est autem vt BC. ad CL. ita AB. ad BM. igitur ex

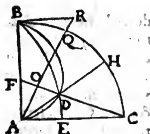
Coroll. 38. huius. æqualitate erit vt HC. ad CL. ita BI. ad BM. Quare quadrantem ita secuimus &c. Quod facere oportebat.

PRO-

PROBLEMA X. PROPOS. XL.

Quadrantem ita secare vt quæ ratio Quadrantis ad complementum dupli arcus, eadem sit sinus totius ad tangentem arcus.

Sint vt in superiori, in Quadrante ABC. descriptæ Helix, & Quadratrix quarta secantes se in D. puncto per quod ex punctis C. D. transeant duæ rectæ ADH. CDF. quarum illa quadrantem secet in H. hac latus erectum in F. & diuidatur arcus BH. bifariam in Q. sitque arcus BQ. tangens BR. & connectatur AR. secans FD. in O. Dico Quadrantem BC. ita sectum esse in Q. vt quæ ratio Quadrantis BC. ad complementum HC. dupli BQ. eadem sit sinus totius AB. ad tangentem BR. Quoniam ADH. recta transit per punctum D. existens in linea spirali erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AD. Rursus quia recta CDF. transit per punctum D. quartæ Quadratricis erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AF. æquales igitur sunt AD. AF. Quare cum in triangulis FAO. DAO. latera FA. AO. lateribus DA. AO. & anguli FAO. DAO. sint æquales (sumpsimus enim arcus BQ. QH. æquales) erunt anguli FOA. DOA. æquales, ideoque recti. Quare cum in triangulo rectangulo CAF. ex A. angulo recto in basim FC. perpendicularis AO. ducta sit erit angulus FCA. æqualis angulo FAO. Igitur cum in triangulis rectangulis CAF. ABR. æquales sint anguli recti ad A. & B. & æquales anguli FCA. BAR. æquales item AC. AB.



1. defin. huius. 33. huius.

9. 5.

4. 1.

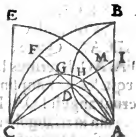
8. 6.

32. & 26. 1. æquiangula, & æqualia erunt dicta triangula, vt ergo CA. id eſt BA. ad AF. ita AB. ad BR. ſed vt BA. ad AF. ita oſtenſus eſt Quadrans BC. ad arcum HC. Vt igitur AB. ad BR. ita BC. ad HC. Quare Quadrantem ita ſecuimus &c. Quod faciendum fuerat.

PROBLEMA IX. PROPOS. XLI.

EX Quadrante duos arcus inæquales auferre ita vt quæ proportio maioris arcus ad minorem, ea ſit ſinus recti minoris ad ſinum complementi maioris.

Super eadem baſi AC. centris A. C. duo Quadrantes deſcribantur ACB. CAE. æquales ſecantes ſe in K. quorum latera erecta AB. CE. ac ſit latus erectum AB. diameter ſpiralis ADB. cuius principium A. extremum B. baſis vero CA. ſit diameter alterius ſpiralis cuius principium C. extremum A. quæ ſpirales ſeſe in puncto D. ſecent, & circa CA. deſcriptus ſit ſemicirculus CGHA. Ducantur autem per punctum D. ſemidiametri AF. AM. illa ſecans ſemicirculum in G. Quadrantem BC. in F. iſta ſecans ſemicirculum in H. Quadrantem EA. in M. & ducta AH. ſecet Quadrantem BC. in H. manifeſtum eſt cum angulus in ſemicirculo CGA. ſit rectus CG. eſſe ſinum rectum arcus FC. & ob eandem cauſam CH. eſſe ſinum rectum arcus KC. & HA. ſinum complementi. Dico eſſe arcum maiorem KC. ad minorem FC.



defin. 1. huius. vt eſt ſinus rectus CG. minoris arcus ad HA. ſinum complementi maioris arcus KC. Nam ex natura ſpiralis, cum punctum D. ſit in ſpirali ADB. erit vt AD. ad AF. id eſt

AD.

AD. ad AC. ita arcus FC. ad Quadrantem CB. id eſt arcus GC. ad ſemicirculum CGA. Rurſus cum idem punctum D. ſit in voluta ADC. erit vt AC. ad CD. ita Quadrans EA. ad arcum EM. ſemicirculus CHA. ad arcum CGH. ergo ex æquali vt AD. ad D. ita arcus CG. ad arcum CH. id eſt arcus FC. ad arcum KC. & conuertendo At vero æquiangula ſunt triangula CGD. AHD. ob angulos rectos ad G. H. & æquales ad verticem D. igitur vt CD. ad DA. ita CG. ad HA. ſed vt CD. ad DA. ita KC. ad FC. ergo eſt KG. ad FC. vt CG. ad HA. ergo ex Quadrante &c. Quod erat faciendum.

PROBLEMA XI. PROPOS. XLII.

Quadrantem ita ſecare, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, ea ſit ſinus totius ad tangentem dupli arcus complementi.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus AB. & quarta Quadratrix in eo deſcripta BDE. centro autem C. diſtantia CA. deſcribatur alius Quadrans CAI. ſecans quartam Quadratricem in D. & ducantur rectæ ADH. ſecans Quadrantem CB. in H. & CDF. ſecans latus BA. in F. & diuidatur DA. bifariam in L. ducaturque CLG. ſecans arcum DA. bifariam in G. erit AF. tangens arcus AD. Dico eſſe vt Quadrantem AI. ad arcum IG. ita ſinum totum BA. ad tangentem arcus BA. qui duplus eſt arcus GA. complementi ipſius IG. Rurſus enim vt in ſuperiori probabimus arcum DA. eſſe

duplum ipsius HB. ideoque GA. dimidium esse æqualem ipsi HB. & reliquos arcus HC. GI. esse æquales : vt ergo
33. huius. BC. ad CH. ita IA. ad IG. vt autem BC. ad CH. ita BA. ad AF. ex descriptione quartæ Quadratricis, Quare vt IA. Quadrans ad arcum IG. ita BA. sinus totus, ad tangengentem BA. Ergo Quadrantem ita secuimus &c. Quod erat faciendum.

F I N I S.

PATAVII,
Apud Variſcum Variſci ad Puteum Pictum. 1629.

Superiorum permiſſu.